UP応用数学選書 5

演算子法

一つの超函数論

吉田耕作 著

東京大学出版会

序

本書は J. Mikusiński の演算子法を，一つの超函数論という観点を強調して解説したものである．

前世紀の終り頃にイギリスの電気工学者 O. Heaviside が，微分積分の演算を記号的・代数的に行なう演算子法を発明し，電気工学におけるいろいろな問題に関する常微分方程式や電信方程式と呼ばれる偏微分方程式などを簡単かつ迅速に解くことを創めた．

この演算子法が有効であることは工学者の間に広く認められるようになった[1]が，その理論の基礎に関する Heaviside の「証明」は数学的に明白でない点が多く彼以外の人にその正当性を納得させることが難かしかった．それで Heaviside の方法を解明しようとして多くの数学者が努力して，演算子法を Laplace 変換に基づいて構成しようというのがこの世紀の半ば頃までの状況であった．

しかし Laplace 変換を用いる演算子法は，その適用範囲にいろいろな制限が付くし[2]，また実際家の側からいえば，簡単さこそ演算子法のメリットであろうのに，Laplace 変換や解析函数論のすすんだ知識を前提としなければならないのでは近づき難いという憾みがあったようである．

ところが，1950 年頃にポーランドの Mikusiński が新しい演算子法を始めてから事態は一変したように思われる．この演算子法は，あとから説明するように「合成積乗法に基づく，二つの連続函数の分数を演算子または超函数と考え

1) 彼の晩年(1921 年)に，Institution of Electrical Engineers of Great Britain が，第1回 Farady 賞を彼に贈ったという．

2) たとえば，函数 e^{t^2} の Laplace 変換 $\int_0^\infty e^{pt}e^{t^2}dt$ は発散するので意味をもたない．

る」という独創的な考えに基づいて，Laplace 変換を援用せずに，数学的に疑義のない演算子法を展開し，これが Heaviside の扱ったような工学上の諸問題の解法に有効なことを示したからである．

Mikusiński の方法は，「区間 $(0, \infty)$ で定義された連続函数 $f(t), g(t)$ の合成積 $f*g(t)=\int_0^t f(t-u)g(u)du$ が $\equiv 0$ のときには，f または g の片方は $\equiv 0$ である」という Titchmarsh の定理に基づく，連続函数 $f(t)\not\equiv 0$ と連続函数 $g(t)$ とから作られる「合成積乗法に関しての分数」$\dfrac{g}{f}$ の作る環[1] $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の理論を作り，$\dfrac{f}{f}=I$ が物理学者 Dirac の有名な δ 函数にあたるものであり，$h(t)\equiv 1$ である h が不定積分 $\int_0^t du$ に，また $s=\dfrac{I}{h}$ が微分 $\dfrac{d}{dt}$ にあたる演算子すなわち超函数[2] になっているのである．

ところで，基礎になる Titchmarsh の定理の証明は，Mikusiński の書物『演算子法』の始めに与えられているが，それは約 8 頁半を必要としている．1979 年の末頃に大学院学生であった岡本周一君が，Titchmarsh の定理において f を t の多項式とした特別な場合には 20 行位で済む簡単な証明を見出し，これを用いれば，定数係数の線形常微分方程式の解法には十分であることを示した．これが，0 でない多項式 p と連続函数 g とから作った分数 $\dfrac{g}{p}$ の作る環 $\mathcal{C}_P$ の理論である．これは現在では，f が 0 次の多項式である場合すなわち「$\int_0^t g(u)du \equiv 0$ ならば $g(t)\equiv 0$」という殆ど自明の事実から導かれるようになっている．すなわち分数 $\dfrac{g}{h^k}$ の作る[3] 環 $\mathcal{C}_H$ の理論である．

本書は第 1 部，第 2 部および第 3 部に分けて Mikusiński の演算子法を解説する．第 1 部は，超函数の類 $\mathcal{C}_H$ によって微分オペレイターにあたる $s=\dfrac{I}{h}=\dfrac{h}{h^2}$ (これは Heaviside の p に相当する) を導入して，定数係数の線形常微分方程式の解法や，分数冪微分，分数冪積分の導入などを論ずる．次に第 2 部では，パラメター λ を含む指数函数的超函数

1) 代数学における ring の訳語で，加法および乗法に関して閉じている系をいう．本文を見られよ．

2) 函数概念の一般化をいう．本文を見られよ．

3) $h^2=h*h,\ h^3=h^2*h, \cdots, h^{k+1}=h^k*h$

$$e^{-\lambda s} \quad と \quad e^{-\lambda\sqrt{s}}$$

を導入する為に，超函数の類 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ を導入する．そうして Heaviside の有名な単位函数

$$H_\lambda(t)=\begin{cases}0, 0\leqq t<\lambda \\ 1, 0\leqq \lambda<t\end{cases}$$

から，$s^2\int_0^t H_\lambda(u)du$ として導入される推移オペレイターと呼ばれる超函数 $e^{-\lambda s}$ と，函数

$$\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \qquad (\lambda>0)$$

によって与えられる超函数 $e^{-\lambda\sqrt{s}}$ を定義する．この $e^{-\lambda\sqrt{s}}$ は熱方程式 $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial}{\partial t}$ の解になるので熱(または)拡散オペレイターとも呼ばれる．第3部は，これらの超函数 $s, e^{-\lambda s}, e^{-\lambda\sqrt{s}}$ を使って，絃の振動方程式や熱方程式を含む電信方程式 (L, R, C, G は定数 $\geqq 0$)

$$U''(\lambda)=(Ls+R)(Cs+G)U(\lambda)$$

の演算子法的取扱いを述べる．

こうして演算子法が一つの超函数論として解説される．そのなかで必要になってくる代数学における環論の初歩，有理函数の部分分数分解定理，一般2項級数展開定理および Titchmarsh 定理の証明に必要な Weierstrass の多項式近似定理などは丁寧に説明し証明してある．また本文中の定義や定理などには例や演習問題を配し，さらに巻末に公式表を付けておいた．

最後に，この書物の執筆を勧めて下さった東京大学の藤田宏教授に厚く感謝の意を表明したい．なお東京大学出版会の大瀬令子さんと小池美樹彦氏には印刷，校正などについて大変お世話になったことの御礼を申し述べたい．

1981年秋

吉田　耕作

目　　次

第III部　偏微分方程式への応用

公 式 表

第Ｉ部　積分オペレイターhと
微分オペレイターs（超函数の類$\mathcal{C}$および$\mathcal{C}_H$）

第1章　連続函数の作る合成積環 $\mathscr{C}$ による積分オペレイター h の導入

§1　連続函数の合成積環 $\mathscr{C}$ とその性質

$0\leqq t<\infty$ で定義された，複素数の値をとる連続函数 $a(t), b(t), c(t), f(t)$ などの全体を $C[0,\infty)$ または簡単に $\mathscr{C}$ と書くことにする．$\mathscr{C}$ の二つの函数 $a=a(t)$ と $b=b(t)$ とから函数 $a*b$ を，次の式

$$(1)\qquad a*b(t)=\int_0^t a(t-u)b(u)du \qquad (0\leqq t<\infty)$$

で定義して，函数 a と函数 b との**合成積**(convolution)または**畳み込み**(folding, Faltung)と呼ぶ．

命題 1　$a*b$ は $\mathscr{C}$ に属する．すなわち $a*b(t)$ は，t の函数として，$0\leqq t<\infty$ において連続函数である．

証明　正数 $\delta>0$ をとるとき

$$\lim_{\delta\to 0} a*b(t+\delta)=a*b(t)$$

を証明する．すなわち

$$\int_0^{t+\delta} a(t+\delta-u)b(u)du=\int_0^t a(t+\delta-u)b(u)du+\int_t^{t+\delta} a(t+\delta-u)b(u)du$$
$$=I_{1,\delta}+I_{2,\delta}$$

とおく．t を定めた場合に $\lim_{\delta\to+0} I_{1,\delta}=\int_0^t a(t-u)b(u)du=a*b(u)$ となることは明らかである．また t を定めた場合に，$0<\delta\leqq 1$ として

$$A = \max_{0 \leqq s \leqq t+1} |a(s)|, \quad B = \max_{t \leqq u \leqq t+1} |b(u)|$$

とおけば

$$|I_{2,\delta}| \leqq \int_t^{t+\delta} ABdu \leqq \delta \cdot AB$$

であるから，$\lim_{\delta \to +0} I_{2,\delta} = 0$ となって，

$$\lim_{\delta \to +0} a*b(t+\delta) = a*b(t)$$

が証明された．$\lim_{\delta \to -0} a*b(t+\delta) = a*b(t)$ についても同じようにして証明される．▌

以下，この章においては $\mathscr{C}$ の函数を a または $\{a(t)\}$ と書き，$a(t)$ と書いたときは函数 a の t における値を示すものと考える．そうして函数 a と b との合成積を簡単に ab と書く：

$$(1)' \qquad ab(t) = \int_0^t a(t-u)b(u)du \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

すなわち合成積 ab の t における値が (1)′ によって与えられるのである．$\mathscr{C}$ における二つの函数 b と c との和 $b+c$ を

$$(2) \qquad (b+c)(t) = b(t)+c(t)$$

によって定義すると，$b+c$ は $\mathscr{C}$ に属する．同じく $\mathscr{C}$ に属する函数 b の複素数 α による $\boldsymbol{\alpha}$ 倍を

$$(3) \qquad (\alpha b)(t) = \alpha b(t) \qquad (b(t) \text{ の } \alpha \text{ 倍})$$

によって定義すると，次の定理が成り立つ．

定理 1

(4) $a+b = b+a, \ a+(b+c) = (a+b)+c,$

(5) $a(b+c) = ab+ac, \ \alpha(a+b) = \alpha a+\alpha b, \ (\alpha+\beta)a = \alpha a+\beta a$

(ギリシャ字は複素数)，

(6) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \ (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a),$

(7) $ab = ba, \ a(bc) = (ab)c, \ (a+b)c = ac+bc$

証明 (7) 以外は容易であるから (7) だけを証明する．$t-u=r$ とおいて

$$(ab)(t) = \int_0^t a(t-u)b(u)du = -\int_t^0 a(r)b(t-r)dr$$

$$= \int_0^t b(t-r)a(r)dr = (ba)(t)$$

つぎに，積分順序を変更して $0 \leqq u \leqq r \leqq t$ に注意し

$$(a(bc))(t) = \int_0^t a(t-r)\left[\int_0^r b(r-u)c(u)du\right]dr$$

$$= \int_0^t \left[\int_u^t a(t-r)b(r-u)dr\right]c(u)du \qquad (r-u=v \text{ とおき})$$

$$= \int_0^t \left[\int_0^{t-u} a(t-u-v)b(v)dv\right]c(u)du$$

$$= \int_0^t ab(t-u)c(u)du = ((ab)c)(t)$$

註　上の定理の内容を**代数**の言葉で述べれば次のようにいえる．$\mathcal{C}=C[0,\infty)$ は，**加法** $a+b$，**乗法** $ab\,(=a*b)$ を算法として，乗法が**可換**な——$ab=ba$ が成り立つ——**環**(ring)を作っており，かつ $\mathcal{C}$ は a とともに a の α 倍 αa を含む．この環 $\mathcal{C}$ の 0(**零元**)は恒等的に 0 になる函数であり，かつすべての $f \in \mathcal{C}$ に対して

(8)
$$f+0=f,\ \ f0=0$$

が成り立つ．

合成積の例

例 1　$a(t)=t$，$b(t)=e^t$ とすると

$$ab(t) = \int_0^t (t-u)e^u du = t\int_0^t e^u du - \int_0^t ue^u du$$

$$= t(e^t-1) - ue^u\Big|_{u=0}^{u=t} + \int_0^t e^u du$$

$$= t(e^t-1) - te^t + e^t - 1$$

$$= -t + e^t - 1$$

例 2　$$\{1\}\{\sin^2 t\} = \int_0^t \sin^2 u du = -\sin u\cos u\Big|_{u=0}^{u=t}$$

$$+\int_0^t \cos^2 u du = -\sin t\cos t + t - \int_0^t \sin^2 u du$$

ゆえに

$$\{1\}\{\sin^2 t\} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t\cos t$$

§2　積分オペレイター h

恒等的に1である函数$\{1\}$をhとおくと，前節の例2と同じく

$$f \in \mathscr{C} \text{ に対して } (hf)(t) = \int_0^t f(u)du$$

であるから，合成積の意味でのhとfとの乗法はfの**不定積分**となる．すなわちhは積分オペレイターを表わす[1]．

これに対してhという文字を当てるのは，O. Heaviside[2] (1850–1925)が，彼の創始した演算子法において**単位函数**(unit function)と呼んだ函数

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 1/2, & t=0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{9}$$

を用いたことに因んだ A. Erdélyi (1908–1977)[3] の用法にならったのである．Heaviside の演算子法に，合成積の概念を用いて数学的に疑義のない基礎付けを与えた J. Mikusiński (1913—)[4] は$\{1\}$にlを用いているが，hの方が印刷上 (typographical) には間違いが少ないと思って，本書でもhを使うことにした．

命題 2　$h^2 = hh = \left\{\int_0^t du\right\} = \{t\}$，$h^3 = hh^2 = \left\{\int_0^t udu\right\} = \left\{\frac{t^2}{2!}\right\}$，…，一般に

$$h^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{10}$$

が成り立つ．

証明　読者これを試みられよ．

---

1)　オペレイター(operator)

2)　ヘヴィサイド(1850–1925)

3)　エアディイイ（？）の書物は Operational Calculus and Generalized Functions. Holt, Rinehart and Winston, New York (1962).

4)　ミクシンスキーの書物の邦訳(松村英之，松浦重武，笠原晧司訳)演算子法上・下，裳華房(1963–64).

第2章　分数 $\frac{f}{h^n}(f\in\mathscr{C})$ の作る環 $\mathscr{C}_H$ による微分オペレイター s の導入

積分オペレイター h の"逆"に当たるものとして**微分オペレイター s** を定義するために標題の環 $\mathscr{C}_H$ を導入する.

§3　環 $\mathscr{C}_H$ の導入. 単位オペレイター $I=\frac{h}{h}$

命題 3　$H=\{k;k=h^n(n=1,2,\cdots)\}$ すなわち $h,h^2,h^3,\cdots$ の全体を H とおく. このとき, 任意の $k=h^n\in H$ と任意の $f\in\mathscr{C}$ とに対して

(1)　$$kf=0 \quad ならば \quad f=0=\{0\}\in\mathscr{C}$$

でなければならない.

証明　$n=1$ のとき. $(hf)(t)=\int_0^t f(u)du=0$ ならば, 両辺を t について微分して

$$\frac{d}{dt}(hf)(t)=f(t)=0 \qquad (0\leqq t<\infty)$$

を得るから $f=0$.

次に $n=2$ として $h^2f=0$ から $f=0$ を導こう. §1の(7)によって $h^2f=h(hf)$ で, $hf\in\mathscr{C}$ であるから, $n=1$ の場合によって $hf=0$. したがって, 再び $n=1$ の場合によって $f=0$.

ゆえに上と同様にして, $h^3f=0$ ならば $f=0$ が証明できるので, n に関する帰納法で, $h^nf=0$ ならば $f=0$ であることが証明される.

命題3の応用として

命題 4　$k, k' \in H$ かつ $f, f' \in \mathcal{C}$ とする．このとき，“分数” f/k と “分数” f'/k' とに対しこの二つの**分数の同等**を示す条件 $\approx$ を，

(2)　$$\frac{f}{k} \approx \frac{f'}{k'} \text{ は } k'f = kf' \text{ を意味する} \quad \left(\frac{f}{k} = f/k\right)$$

によって与えることが出来る．すなわち $\approx$ は**同値律** (equivalence relation) と呼ばれる

(2)$_1$　$\dfrac{f}{k} \approx \dfrac{f}{k}$　(反射法則)

(2)$_2$　$\dfrac{f}{k} \approx \dfrac{f'}{k'}$ ならば $\dfrac{f'}{k'} \approx \dfrac{f}{k}$　(対称法則)

(2)$_3$　$\dfrac{f}{k} \approx \dfrac{f'}{k'}$, $\dfrac{f'}{k'} \approx \dfrac{f''}{k''}$ ならば $\dfrac{f}{k} \approx \dfrac{f''}{k''}$　(推移法則)[1)]

を満足する．

証明　(2)$_1$ は $kf = kf$ から明らか．(2)$_2$ は，$k'f = kf'$ から $kf' = k'f$ が導かれることによって明らか．

(2)$_3$ の証明．$k'f = kf'$, $k''f' = k'f''$ が成り立っているとする．これらに，それぞれ k'', k を乗じて §1 の (7) を用い，$a(bc) = (ab)c = abc$ と書くと

$$fk'k'' = f'kk'', \quad f'kk'' = f''kk'$$

したがって $fk'k'' = f''kk'$．これから

$$(fk'' - f''k)k' = 0$$

を得るので命題 3 によって $fk'' = f''k$ すなわち $\dfrac{f}{k} \approx \dfrac{f''}{k''}$ がいえた． ∎

注　$\approx$ は “等号” の満足すべき条件としての同値律を満足することがわかったので，以後は $\approx$ の代りに等号 $=$ を用いても差し支えはおこらない．すなわち (2) の代りに

(2)′　$\dfrac{f}{k} = \dfrac{f'}{k'}$ は $k'f = kf'$ を意味する

としてよい．これから次の定理が証明される．

定理 2　“分数” $\dfrac{f}{k}$ $(k \in H, f \in \mathcal{C})$ の和と積とを次の規則で定義出来る：

(3)　$$\frac{f_1}{k_1} + \frac{f_2}{k_2} = \frac{f_1k_2 + f_2k_1}{k_1k_2}$$

---

1)　$k'' \in H$ かつ $f'' \in \mathcal{C}$

(4) $$\frac{f_1}{k_1}\frac{f_2}{k_2}=\frac{f_1f_2}{k_1k_2}$$

証明　上の加法(和)および乗法(積)の定義に矛盾がないことを示せばよい．すなわち，$\frac{f_1}{k_1}=\frac{f_3}{k_3}$, $\frac{f_2}{k_2}=\frac{f_4}{k_4}$ であるとき

$$\frac{f_1}{k_1}+\frac{f_2}{k_2}=\frac{f_3}{k_3}+\frac{f_4}{k_4},\ \frac{f_1}{k_1}\frac{f_2}{k_2}=\frac{f_3}{k_3}\frac{f_4}{k_4}$$

が成り立つこと，いいかえれば

$$\frac{f_1k_2+f_2k_1}{k_1k_2}=\frac{f_3k_4+f_4k_3}{k_3k_4},\ \frac{f_1f_2}{k_1k_2}=\frac{f_3f_4}{k_3k_4}$$

が成り立つことを(2)′を用いて確かめなければならない．これは数の分数の場合と同じく大した困難もなく出来ることであるので読者の演習として残しておくことにする．

系　上の加法，乗法で，

(5) $$\mathcal{C}_H=\left\{\frac{f}{k};k\in H, f\in\mathcal{C}\right\}$$

は，乗法が可換な(すなわち下の$(7)_2$が成り立つ)環を作る．すなわち定理1における(4), (5), (6), (7)と同じく，次の$(4)_2$, $(5)_2$, $(6)_2$, $(7)_2$が成り立つ：

$(4)_2$ $$\begin{cases}\dfrac{f}{k}+\dfrac{f'}{k'}=\dfrac{f'}{k'}+\dfrac{f}{k},\\[2ex] \dfrac{f}{k}+\left(\dfrac{f'}{k'}+\dfrac{f''}{k''}\right)=\left(\dfrac{f}{k}+\dfrac{f'}{k'}\right)+\dfrac{f''}{k''}\end{cases}$$

$(5)_2$ $$\begin{cases}\dfrac{f}{k}\left(\dfrac{f'}{k'}+\dfrac{f''}{k''}\right)=\dfrac{f}{k}\dfrac{f'}{k'}+\dfrac{f}{k}\dfrac{f''}{k''},\\[2ex] \alpha\left(\dfrac{f}{k}+\dfrac{f'}{k'}\right)=\dfrac{\alpha f}{k}+\dfrac{\alpha f'}{k'},\\[2ex] (\alpha+\beta)\dfrac{f}{k}=\dfrac{\alpha f}{k}+\dfrac{\beta f}{k}\end{cases}$$

$(6)_2$ $$\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{f}{k}\dfrac{f'}{k'}\right)=\dfrac{\alpha f}{k}\dfrac{f'}{k'}=\dfrac{f}{k}\dfrac{\alpha f'}{k'},\\[2ex] (\alpha\beta)\dfrac{f}{k}=\alpha\left(\beta\dfrac{f}{k}\right)=\alpha\left(\dfrac{\beta f}{k}\right)=\dfrac{(\alpha\beta)f}{k}\end{cases}$$

(7)$_2$
$$\begin{cases}\dfrac{f}{k}\dfrac{f'}{k'}=\dfrac{f'}{k'}\dfrac{f}{k},\ \dfrac{f}{k}\left(\dfrac{f'}{k'}\dfrac{f''}{k''}\right)=\left(\dfrac{f}{k}\dfrac{f'}{k'}\right)\dfrac{f''}{k''},\\[2ex] \left(\dfrac{f}{k}+\dfrac{f'}{k'}\right)\dfrac{f''}{k''}=\dfrac{f}{k}\dfrac{f''}{k''}+\dfrac{f'}{k'}\dfrac{f''}{k''}\end{cases}$$

証明は数の分数のときと同じようにして出来るから略す.

単位オペレーター I　上の(2)′によって$\dfrac{h^n}{h^n}\in\mathscr{C}_H\,(n=1,2,\cdots)$は互に等しい. $h^nh^m=h^mh^n$であるからである. しかも(2)′により

(6)
$$\frac{h^n}{h^n}\frac{f}{k}=\frac{f}{k}$$

が成り立つ. $kh^nf=h^nkf$であるからである.

ゆえに$\dfrac{h^n}{h^n}$は環$\mathscr{C}_H$における**乗法単位**(multiplicative unit)であるのでこれを**単位オペレーター**と呼びIまたは1で表わす.

(7)
$$\frac{h^n}{h^n}=\mathrm{I}=1\qquad(n=1,2,\cdots)$$

§4　超函数の類としての$\mathscr{C}_H$

$\mathscr{C}=C[0,\infty)$の元としての連続函数$f=\{f(t)\}$は, これを

(8)
$$\frac{h^nf}{h^n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

のいずれとも同一視することによって, 環$\mathscr{C}$は環$\mathscr{C}_H$の**部分環**(subring)と考えることが出来る.

(3)によって

$$\frac{h^nf}{h^n}+\frac{h^mg}{h^m}=\frac{h^{n+m}f+h^{n+m}g}{h^{n+m}}=\frac{h^{n+m}(f+g)}{h^{n+m}}$$

また(4)によって

$$\frac{h^nf}{h^n}\frac{h^mg}{h^m}=\frac{h^{n+m}(fg)}{h^{n+m}}$$

となるので, $\mathscr{C}$における加法$f+g$, 乗法fgが$\mathscr{C}_H$における加法$\dfrac{h^{n+m}(f+g)}{h^{n+m}}$, 乗法$\dfrac{h^{n+m}(fg)}{h^{n+m}}$に対応させられるからである.

したがって以下に

$$(8)' \qquad f=\frac{hf}{h}=\frac{h^2f}{h^2}=\cdots=\frac{h^nf}{h^n}=\cdots$$

としても差し支えない．

すなわち，$\mathscr{C}_H$ の元のなかには，$\dfrac{h^nf}{h^n}=f$ のように $\mathscr{C}$ に属するもの——連続函数であるもの——がある．しかし

命題 5　$\mathscr{C}_H$ のなかには $\mathscr{C}$ に属さないものがある．たとえば単位オペレイター $\mathrm{I}=1=\dfrac{h^n}{h^n}$ は $\mathscr{C}$ に属する函数 f と考えることが出来ない．

証明　$\dfrac{h}{h}=\dfrac{hf}{h}$ となるような $f\in\mathscr{C}$ があったとして矛盾に導ければよい．"分母を払って" すなわち(2)′によって

$$h^2=h^2f$$

故に

第1章(10)により

$$\{t\}=\{t\}f=\left\{\int_0^t(t-u)f(u)du\right\}$$

両辺を微分して

$$\{1\}=\left\{(t-t)f(t)+\int_0^t f(u)du\right\}=\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

再び両辺を微分して $\{0\}=\{f(t)\}$，すなわち $f=0$ となる．そうすると $h^2=\{t\}=h^2f=h^20=0$ となって不合理である．▎

超函数　$\mathscr{C}_H$ の元 $\dfrac{f}{h^n}$ のなかには $\mathscr{C}$ に属する函数でないものがあることがわかった．このようにして $\mathscr{C}$ から必ずしも $\mathscr{C}$ に属さない $\dfrac{f}{h^n}$ を得る**操作**

$$\mathscr{C}\ni f\longrightarrow\frac{f}{h^n}\in\mathscr{C}_H$$

が導かれたのであった．一般に $\dfrac{f}{h^n}$ を，すなわち上の操作によって得られた "拡張した意味の函数(generalized function)" を，$f\in\mathscr{C}$ を h^n で割るという手続によって得られた "**超函数**" (hyperfunction) と呼ぶことにする．すなわち単位オペレイターは "函数でない超函数" の一例である．次の§5で超函数の重

要な例としての微分オペレイター s について述べる.

§5　超函数としての微分オペレイター s と α 倍オペレイター$[\alpha]$

定理 3

$$s=\frac{1}{h}=\frac{h^{n-1}}{h^n}\qquad (n=1,2,\cdots;h^0=1) \tag{9}$$

とおけば, s はつぎの意味で微分オペレイターである. すなわち $f\in C[0,\infty)$ が一回連続微分可能である――f の導函数 f' が $\in C[0,\infty)$ である――ならば

$$\begin{cases} f'=sf-[f(0)], \text{ ここに } sf\in\mathscr{C}_H \text{ かつ} \\ [f(0)]=\dfrac{\{f(0)\}}{h}=\{f(0)\}/h\in\mathscr{C}_H \end{cases} \tag{10}$$

証明　まず

$$hs=h\frac{1}{h}=\frac{h}{h}=I=1 \tag{11}$$

に注意する. そうすると(10)の後半により

$$\begin{aligned} hf' &=\{(hf')(t)\}=\left\{\int_0^t f'(u)du\right\} \\ &=\{f(t)-f(0)\}=f-\{f(0)\}=f-[f(0)]h \end{aligned}$$

この両辺に s を乗じて(11)を用い

$$s(hf')=(sh)f'=f'=sf-[f(0)]sh=sf-[f(0)]$$

∎

定理 4　任意の複素数 α に対して

$$[\alpha]=\{\alpha\}/h=\frac{\{\alpha\}}{h}\in\mathscr{C}_H \tag{12}$$

は <u>α-倍するオペレイター</u>である.

証明　任意の $\dfrac{f}{h^n}\in\mathscr{C}_H$ に対して

$$\begin{aligned} [\alpha]\frac{f}{h^n} &=\frac{\{\alpha\}}{h}\frac{f}{h^n}=\frac{\{\alpha\}f}{h^{n+1}}=\frac{\left\{\displaystyle\int_0^t \alpha f(u)du\right\}}{h^{n+1}} \\ &=\frac{h(\alpha f)}{hh^n}=\frac{\alpha f}{h^n}=\frac{f}{h^n} \text{ の } \alpha\text{-倍} \qquad ((5)_2 \text{ に示した如く}) \end{aligned}$$

註1　$\{\alpha\}=\{1\}$ の α-倍 $=h$ の α-倍であるから，

$$[\alpha]=\frac{\{\alpha\}}{h}=\frac{\alpha h}{h}=\alpha I=I \text{ の } \alpha\text{-倍} \tag{13}$$

であって，$[\alpha]$が α-倍するオペレイターであることも明らかである．

註2　$\mathscr{C}_H$ の元は $\dfrac{f}{h^n}(f\in\mathscr{C})$ の形であるから，(9)によって $s^nf(f\in\mathscr{C})$ と書ける．

定理4の系　$f\in\mathscr{C}\in C[0,\infty)$ が n 回連続微分可能ならば，f の n 次導函数 $f^{(n)}$ は $\in\mathscr{C}=C[0,\infty)$ で

$$s^nf=f^{(n)}+s^{n-1}[f(0)]+s^{n-2}[f'(0)]+\cdots+s[f^{(n-2)}(0)]+[f^{(n-1)}(0)] \tag{14}$$

証明　(10)により

$$\begin{aligned} f''=(f')'=sf'-[f'(0)]&=s(sf-[f(0)])-[f'(0)]\\ &=s^2f-s[f(0)]-[f'(0)]\end{aligned}$$

よって $n=1,2$ の場合の(14)は証明された．一般の n に対しては帰納法で(14)を示せばよい[1]．

註3　$f\in\mathscr{C}=C[0,\infty)$ が連続な導函数 f' をもたないときに，$sf=\dfrac{f}{h}$ を f の"拡張された意味の導函数"(generalized derivative)と呼ぶことにすると，この f は拡張された意味で何回でも微分できて n 回微分した結果は s^nf という超函数 $\dfrac{f}{h^n}\in\mathscr{C}_H$ で与えられるのである．

超函数　上の註2に述べたごとく，$\mathscr{C}_H$ の元は，$s^nf(f\in\mathscr{C})$ の形のものの全体である．すなわち，§4で定義した超函数は，$f\in\mathscr{C}$ に**微分オペレイター s** の n 乗 s^n を乗じたもの[2]と定義してもよい．そのなかには

$$sh=\mathrm{I}\quad\text{とか}\quad s(\alpha h)=\alpha\mathrm{I}$$

のような元があり，$\alpha\mathrm{I}$ は $\alpha\neq0$ のときには§4の命題5に示したように函数 $\in\mathscr{C}$ ではない．また，$s^n=s^{n+1}h$ であるから s^n は超函数である．そして $h^n=sh^{n+1}$ は函数 $\in\mathscr{C}$ で表わされる超函数である．さらにまた α 倍オペレイター$[\alpha]$も$[\alpha]=$

---

1)　以下誤解のおそれのないところでは，$[\alpha]$や$[f(0)]$，$[f'(0)]$などの括弧を省略して，α や $f(0)$, $f'(0)$ などをそれぞれ α 倍オペレイター，$f(0)$ 倍オペレイター，$f'(0)$ オペレイターを表わすものとする．

2)　この意味で，$f\in\mathscr{C}$ は超函数的に n 回微分出来る $(n=1,2,\cdots)$ そしてこの微分の結果である s^nf は超函数 $\in\mathscr{C}_H$ である．しかもこの s^nf はまた超函数的に m 回微分できて $s^m(s^nf)=s^{m+n}f\in\mathscr{C}_H$.

$\dfrac{\{\alpha\}}{h}=s\{\alpha\}$ であるから超函数で $\alpha\mathrm{I}$ に等しい.

例 s の多項式

$$\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0 s^0$$

は超函数 $\in\mathcal{C}_H$ である. 各単項式 $\alpha_k s^k$ は $\in\mathcal{C}_H$ であり $\mathcal{C}_H$ は加法と乗法とについて環になっているからである.

註 J. Mikusiński の演算子法においては

$$s^n f=\frac{f}{h^n}\qquad (f\in\mathcal{C})$$

よりも, もっと一般な

$$\frac{f}{g}\qquad (\text{ただし } f,g \text{ ともに } \mathcal{C} \text{ で } g\neq 0)$$

を用いている. いわゆる

Titchmarsh の定理 a,b ともに $\mathcal{C}$ で, $\int_0^t a(t-u)b(u)du=a*b(t)$ が恒等的に 0 ならば, $a(t)\equiv 0$ または $b(t)\equiv 0$ である (ここで $\equiv 0$ は恒等的に 0 を示す.) が成り立つので, $\dfrac{f}{h^n}$ のような“分数”を作ったと同様にして $\dfrac{f}{g}\,(g\neq 0)$ という形の“分数”すなわちいわゆる**合成積商** (convolution quotient) が考えられるからである. ところが Titchmarsh の定理の証明は, Mikusiński の著書邦訳でも 9 頁を必要としている. われわれの $s^n f=\dfrac{f}{h^n}$ には, §2 の命題 3 ——その証明は 9 行で済む——を用いればよいのである[1]. そして第 5 章までの内容などを取り扱うのには, $s^n f$ だけで十分なのである. なお函数概念および微分の概念を拡張 (一般化) して成功したものとして S. Sobolev-L. Schwartz のディストリビューション[2] や佐藤幹夫の hyperfunction がある[3]. 一般化するアイデアに則してそれぞれの異なる超函数が登場して解析学を発展させているのである.

1) $s^n f$ のみの導入は K. Yosida-S. Okamoto: *A* note on Mikusiński's operational calculus, Proc. Jap. Acad. 56, Ser. A, No. 1 (1980), 1–3.

2) L. シュワルツ著, 岩村聯-石垣春夫-鈴木文夫訳：超函数の理論, 岩波書店 (1971).

3) 金子晃：超函数入門上, 東京大学出版会 (1980) およびそこに与えられている文献を見よ.

§6　超函数$\dfrac{1}{s-\alpha}=\dfrac{I}{s-[\alpha]}=\{e^{\alpha t}\}$の証明

定理5　超函数$s-\alpha=s-[\alpha]$に対して

$$(s-[\alpha])\frac{f}{h^n}=I$$

となる$\mathcal{C}_H$の元$\dfrac{f}{h^n}$が唯一つ存在し$\dfrac{f}{h^n}=\{e^{\alpha t}\}$で与えられる.

証明　第2章の(10)により

$$s\{e^{\alpha t}\}=\left\{\frac{d}{dt}e^{\alpha t}\right\}+[e^{\alpha\cdot 0}]=[\alpha]\{e^{\alpha t}\}+[1]$$

ゆえに

$$(s-[\alpha])\{e^{\alpha t}\}=[\alpha]\{e^{\alpha t}\}+[1]-[\alpha]\{e^{\alpha t}\}=[1]=I$$

すなわち，乗法が可換であるから，

(15)
$$(s-[\alpha])\{e^{\alpha t}\}=\{e^{\alpha t}\}(s-[\alpha])=I$$

が得られた．故にもし$\dfrac{f}{h^n}\in\mathcal{C}_H$が

(15)′
$$(s-[\alpha])\frac{f}{h^n}=I$$

を満すとすると，両辺に$\{e^{\alpha t}\}$を乗じて

$$\{e^{\alpha t}\}\left((s-[\alpha])\frac{f}{h^n}\right)=\{e^{\alpha t}\}$$

こ左辺は，環$\mathcal{C}_H$における積の結合律(第2章§3のなかの)

$$\frac{f}{k}\left(\frac{f'}{k'}\frac{f''}{k''}\right)=\left(\frac{f}{k}\frac{f'}{k'}\right)\frac{f''}{k''}$$

により

$$(\{e^{\alpha t}\}(s-[\alpha]))\frac{f}{h^n}=I\cdot\frac{f}{h^n}=\frac{f}{h^n}$$

となるので，結局$\dfrac{f}{h^n}=\{e^{\alpha t}\}$を得る．∎

系　$(s-\alpha)=(s-[\alpha])$は，乗法単位Iをもつ可換な環$\mathcal{C}_H$において，(15)′を満足する唯一の元$\{e^{\alpha t}\}$をもつ．<u>このようなとき</u>，$(s-\alpha)=(s-[\alpha])$は環$\mathcal{C}_H$において<u>乗法の意味での逆元</u>(multiplicative inverse)

$$(s-[\alpha])^{-1}=\frac{I}{(s-[\alpha])}=\frac{1}{(s-[\alpha])}$$

をもつといい，それは具体的な函数 $\{e^{\alpha t}\}$ で与えられる：

$$\frac{1}{(s-[\alpha])}=\frac{I}{(s-[\alpha])}=\{e^{\alpha t}\} \tag{16}$$

同様に，$\{e^{\alpha t}\}$ は環 $\mathcal{C}_H$ において(15)を満足する唯一つの元$(s-[\alpha])$をもつ．したがって上と同じく，$\{e^{\alpha t}\}$ は環 $\mathcal{C}_H$ において乗法の意味での逆元(multiplicative inverse)

$$\{e^{\alpha t}\}^{-1}=\frac{I}{\{e^{\alpha t}\}}=\frac{1}{\{e^{\alpha t}\}}$$

をもち，それは超函数$(s-[\alpha])\in\mathcal{C}_H$ で与えられる：

$$\{e^{\alpha t}\}^{-1}=\frac{I}{\{e^{\alpha t}\}}=\frac{1}{\{e^{\alpha t}\}}=(s-[\alpha]) \tag{16$'$}$$

註　このような，環 $\mathcal{C}_H$ における論法は，今後たびたび使うことになる．

定理 5′　nを自然数とする．このとき$(s-\alpha)^n$ は環 $\mathcal{C}_H$ における乗法の意味での逆元をもち，それは次式で与えられる．

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n}=\frac{I}{(s-[\alpha])^n}=\left(\frac{1}{s-[\alpha]}\right)^n=\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\}\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{17}$$

証明　$(s-\alpha)^2=(s-\alpha)(s-\alpha)$ であるから

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2}=\frac{1}{s-\alpha}\,\frac{1}{s-\alpha}=\{e^{\alpha t}\}\,\{e^{\alpha t}\}=\left\{\int_0^t e^{\alpha(t-u)}e^{u}du\right\}$$
$$=\left\{e^{\alpha t}\int_0^t du\right\}=\{te^{\alpha t}\}$$

ゆえに，$(s-\alpha)^3=(s-\alpha)(s-\alpha)^2$ を用いて

$$\frac{1}{(s-\alpha)^3}=\frac{1}{s-\alpha}\,\frac{1}{(s-\alpha)^2}=\{e^{\alpha t}\}\left\{\frac{t}{1!}e^{\alpha t}\right\}=\left\{\int_0^t e^{\alpha(t-u)}\,\frac{u}{1!}e^{\alpha u}du\right\}$$
$$=\left\{e^{\alpha t}\int_0^i \frac{u}{1!}du\right\}=\left\{\frac{t^2}{2!}e^{\alpha t}\right\}$$

こうして一般に(17)を得る．∎

第3章　定数係数の線形常微分方程式の解法への $\dfrac{1}{s-\alpha}=\{e^{\alpha t}\}$ の応用

§7　定数係数の線形常微分方程式の初期値問題の超函数方程式への転換

$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を複素数(ただし $\alpha_n \neq 0$ とする)，$f \in C[0, \infty)$ として，n 階の線形常微分方程式

(1)
$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f$$

を考える．これを函数 y についての $t=0$ における初期条件

(2)
$$y(0) = \gamma_0,\ \ y'(0) = \gamma_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = \gamma_{n-1}$$

のもとに解くことを問題とする．この問題を次の定理によって超函数方程式の問題に転換する:

定理 6

(3)
$$\begin{cases} (\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 I) y \\ = f + \beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0 I, \\ \beta_\nu = \alpha_{\nu+1}\gamma_0 + \alpha_{\nu+2}\gamma_1 + \cdots + \alpha_n \gamma_{n-\nu-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \end{cases}$$

証明　第2章(14)によって

(4)
$$y^{(k)} = s^k y - s^{k-1} y(0) - s^{k-2} y'(0) - \cdots - s y^{(k-2)}(0) - y^{(k-1)}(0)$$

であるから(2)によって(1)を書き直すと(3)が得られる．

註　このように書き直して，**超函数方程式**に転換した効用は，(1)の初期条件(2)が超函数方程式(3)のなかに融け込んでしまっているので，初期条件に気をとられずに(3)から未知函数 y を求めることに専念すればよいところにある

のである．ここに**超函数方程式**といったのは，(3) の左辺は

未知函数 $y \in C[0,\infty)$ に s の n 次多項式で与えられる超函数 $(\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I) \in \mathscr{C}_H$ を乗じたもの

であり，また (3) の右辺は

$f \in C[0,\infty) \subseteqq \mathscr{C}_H$ に，s の $(n-1)$ 次多項式

で与えられる超函数 $(\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_0 I) \in \mathscr{C}_H$ を加えた超函数 $\in \mathscr{C}_H$ であるからである．

例　$n=1$ である初期値問題

(5)
$$\alpha_1 y' + \alpha_0 y = f,\ y'(0) = \gamma_0$$

は超函数方程式

(5)′
$$\alpha_1 sy + \alpha_0 y = f + \alpha_1\gamma_0$$

に転換される．$\alpha_1 \neq 0$ であるから，これは

$$\left(s + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) y = \frac{f}{\alpha_1} + \gamma_0$$

になる．両辺に $\dfrac{1}{s+\alpha_0/\alpha_1} = \{e^{-\alpha_0 t/\alpha_1}\}$ を乗じて

$$y = \{e^{-\alpha_0 t/\alpha_1}\}\left\{\frac{f(t)}{\alpha_1} + \gamma_0\right\} = \left\{\gamma_0 e^{-\alpha_0 t/\alpha_1} + \int_0^t e^{-\alpha_0(t-u)/\alpha_1}\frac{f(u)}{\alpha_1}du\right\}$$

すなわち (5)′ の解 $y = \{y(t)\}$ が求まった：

$$y(t) = \gamma_0 e^{-\alpha_0 t/\alpha_1} + \int_0^t \frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_0(t-u)/\alpha_1} f(u)du$$

超函数方程式 (3) を解いて未知函数 $y \in \mathscr{C}$ を求めること．

(3) を形式的に解いた $(s^0 = I)$

(6)
$$y = \frac{I}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0 s^0} f + \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_0 s^0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-2} + \cdots + \alpha_0 s^0}$$

の右辺の，I を s の n 次多項式で割った“分数”と，s の $(n-1)$ 次多項式を s の n 次多項式で割った“分数”とが $\mathscr{C} = C[0,\infty)$ の元として意味付けられることを示したい．

その為に，次の §8 で多項式環について述べることにする．

§8　s の多項式環が零因子をもたないことの応用，s の有理式の定義

s の n 次多項式

$$P(s)=\lambda_n s^n+\lambda_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\lambda_0 s^0 \qquad (\lambda_n \neq 0)$$

と s の m 次多項式 $Q(s)$

$$Q(s)=\mu_m s^m+\mu_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\mu_0 s^0 \qquad (\mu_m \neq 0)$$

は，いずれも環 $\mathscr{C}_H$ の元であるから，その乗法は普通の多項式の積を作るのと全く同じ計算によってなされる．すなわち

命題 6　$P(s)Q(s)$ は s の $(n+m)$ 次多項式であり次の式で与えられる：

$$P(s)Q(s)=\lambda_n\mu_m s^{n+m}+(\lambda_n\mu_{m-1}+\lambda_{n-1}\mu_m)s^{n+m-1} +\cdots+\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda_{k-i}\mu_i\right)s^k+\cdots+\lambda_0\mu_0 s^0 \tag{7}$$

証明　$\lambda_n \neq 0, \mu_m \neq 0$ であるから $\lambda_n\mu_m \neq 0$ なので $P(s)Q(s)$ が s の $(n+m)$ 次多項式になる．

命題6の系は大切である．

系　s の2つの多項式 $P_1(s)$ と $Q_1(s)$ との積 $P_1(s)Q_1(s)$ が0になれば，$P_1(s)$ または $Q_1(s)$ の少くとも片方は0でなければならない．

証明　(7)式から明らか．

註　s の多項式の全体は，環 $\mathscr{C}_H$ の1部分として $\mathscr{C}_H$ における加法，乗法の意味で乗法について可換な環を作る．すなわち s の多項式の全体は $\mathscr{C}_H$ の部分環(subring)を作る．この環を s の多項式環(polynomial ring)という．上の系を次の定理のような述べ方をすることがある．

定理 7　s の多項式環は零因子(zero factor)をもたない．すなわち0でない多項式 $P_1(s)$ を0でない多項式 $Q_1(s)$ に乗じて0になることはない．

<u>s の多項式による分数すなわち s の有理式の定義</u>

命題 7　s の多項式 $p(s)$ と $q(s)$ とについて $p(s)\neq 0$ のとき，“分数” $\dfrac{q(s)}{p(s)}$ を考え，2つの分数の同等を示す条件 $\approx$ を

$$\frac{q(s)}{p(s)}\approx\frac{q_1(s)}{p_1(s)} \text{ は } q(s)p_1(s)=p(s)q_1(s) \text{ を意味する} \tag{8}$$

とすると，命題4のときと同じようにして，この $\approx$ が**同値律**：

$$\frac{q(s)}{p(s)} \approx \frac{q(s)}{p(s)}, \frac{q(s)}{p(s)} \approx \frac{q_1(s)}{p_1(s)} \quad \text{ならば} \quad \frac{q_1(s)}{p_1(s)} \approx \frac{q(s)}{p(s)},$$

$$\frac{q(s)}{p(s)} \approx \frac{q_1(s)}{p_1(s)}, \frac{q_1(s)}{p_1(s)} \approx \frac{q_2(s)}{p_2(s)} \quad \text{ならば} \quad \frac{q(s)}{p(s)} \approx \frac{q_2(s)}{p_2(s)}$$

を満足する.

証明 3番目の推移法則だけ証明する. すなわち

$$q(s)p_1(s) = p(s)q_1(s), q_1(s)p_2(s) = p_1(s)q_2(s)$$

ならば, 始めの式に $p_2(s)$ を乗じて

$$q(s)p_1(s)p_2(s) = p(s)q_1(s)p_2(s)$$

また2番目の式に $p(s)$ を乗じて

$$p(s)q_1(s)p_2(s) = p(s)p_1(s)q_2(s)$$

を得るので $q(s)p_1(s)p_2(s)=p(s)p_1(s)q_2(s)$. よって

$$p_1(s)(q(s)p_2(s)-p(s)q_2(s)) = 0$$

となり $p_1(s)$ は分母として $\neq 0$ であるから, 定理7によって

$$q(s)p_2(s)-p(s)q_2(s) = 0$$

すなわち $\dfrac{q(s)}{p(s)} \approx \dfrac{q_2(s)}{p_2(s)}$ が成り立つ. ∎

ゆえに ≈ を等号 = として

(8)′ $$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_1(s)}{p_1(s)} \text{ は } q(s)p_1(s)=p(s)q_1(s) \text{ を意味する}$$

としてよい. そうして定理2と同じく

定理8 "分数" $\dfrac{q(s)}{p(s)}$ $(p(s)\neq 0)$ の和と積とを次の規則で定義することが出来る:

$$\frac{q(s)}{p(s)}+\frac{q_1(s)}{p_1(s)} = \frac{q(s)p_1(s)+p(s)q_1(s)}{p(s)p_1(s)}, \frac{q(s)}{p(s)}\frac{q_1(s)}{p_1(s)} = \frac{q(s)q_1(s)}{p(s)p_1(s)}.$$

しかも, "分数" $\dfrac{q(s)}{p(s)}$ $(p(s)\neq 0)$ の全体は, 上の加法, 乗法で(乗法が可換な)環を作る. その上, 複素数 α による α 倍に関して

$$(\alpha+\beta)\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{\alpha q(s)}{p(s)}+\frac{\beta q(s)}{p(s)},$$

$$\alpha\left(\frac{q(s)}{p(s)}+\frac{q_1(s)}{p_1(s)}\right)=\frac{\alpha q(s)}{p(s)}+\frac{\alpha q_1(s)}{p_1(s)},$$

$$\alpha\left(\frac{q(s)}{p(s)}\ \frac{q_1(s)}{p_1(s)}\right)=\frac{\alpha q(s)q_1(s)}{p(s)p_1(s)}$$

も成り立つ.

註　"分数" $\dfrac{q(s)}{p(s)}$ $(p(s)\neq 0)$ を **s の有理式**と呼ぶ. 特に $p(s)=I=s^0$ の場合の $\dfrac{q(s)}{s^0}$ と $q(s)$ とを同一視することによって s の多項式 $q(s)$ は s の有理式の特別の場合と考えてよい. したがって

(9)
$$q_1(s)\frac{q(s)}{p(s)}=\frac{q_1(s)q(s)}{s^0p(s)}=\frac{q_1(s)q(s)}{p(s)}$$

また

(10)
$$p(s)\frac{q(s)}{p(s)}=\frac{p(s)q(s)}{p(s)}=q(s)$$

の如く分母, 分子に同じ多項式 $(\neq 0)$ があると, これらは "約す" ことが出来る.

§9　s の有理式の部分分数分解とその応用

まず

命題 8　s の n 次多項式 $(s^0=I)$

(11)
$$p(s)=\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_0 s^0 \qquad (\alpha_n\neq 0)$$

に対して, 複素数変数 z の n 次多項式 $(z^0=1)$

(12)
$$p(z)=\alpha_n z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_0 z^0$$

を考える. n 次多項式であるから, Gauss の定理によって. 相異なる複素数 z_1, $z_2,\cdots,z_k$ $(k\leqq n)$ で

(13)
$$p(z)=\alpha_n(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_k)^{m_k},\ \sum_{i=1}^{k}m_i=n$$

と表わされる. これを用いて

(13)′
$$p(s)=\alpha_n(s-z_1)^{m_1}(s-z_2)^{m_2}\cdots(s-z_k)^{m_k}$$

が成り立つ. ((13) の右辺の掛け算を遂行すると (12) の右辺を得ることから明らかである.)

定理 9　(13)′ に与えられた s の n 次多項式 $p(s)$ の他に, s の m 次多項式 $q(s)$

を考える，ただし $m<n$ とする．このとき

(14) $$\frac{q(s)}{p(s)}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{u=1}^{m_j}\frac{C_{ju}I}{(s-z_j)^u} \quad (\text{部分分数分解})$$

となるような複素数 C_{ju} が唯一通りに定まる．ゆえに§6の(17)によって，

(14)′ $$\frac{q(s)}{p(s)}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{u=1}^{m_j}C_{ju}\left\{\frac{t^{u-1}}{(u-1)!}e^{z_jt}\right\}$$

すなわち分数 $\frac{q(s)}{p(s)}$ は，抽象的な「$\mathscr{C}_H$ の二つの元から作った分数($p(s)\neq 0$)」に過ぎないのではなくて，$C[0,\infty)$ に属する t の無限回微分可能な函数で表わされる[1]．

証明 (13)′ によって

$$p(s)=(s-z_1)^{m_1}f(s)$$

と書ける．ここに $f(s)$ は s の $(n-m_1)$ 次多項式である．そうすると(13)からわかるように多項式 $f(z)$ は因数 $(z-z_1)$ をもたない．したがって**剰余の定理**によって $f(z_1)\neq 0$，ゆえに複素数

$$\mu=q(z_1)/f(z_1)$$

が定まる．この μ を用いて

$$\frac{q(s)}{p(s)}=\frac{q(s)}{(s-z_1)^{m_1}f(s)}=\frac{\mu}{(s-z_1)^{m_1}}+\frac{q(s)-\mu f(s)}{(s-z)^{m_1}f(s)}$$

と書くと，μ の定義から $q(z_1)-\mu f(z_1)=0$．ゆえに

$$q(z)-\mu f(z)=(z-z_1)f_1(z)$$

と因数分解できる(剰余の定理)．$q(z)$ も $f(z)$ もともにその次数が $p(z)=(z-z_1)^m f(z)$ の次数 n より小さい．ゆえに

$$\frac{q(s)-\mu f(s)}{(s-z)^{m_1}f(s)}=\frac{(s-z_1)f_1(s)}{(s-z_1)^{m_1}f(s)}=\frac{f_1(s)}{(s-z_1)^{m_1-1}f(s)}$$

の最右辺における分母の次数は $(n-1)$ で，分子の次数は $(n-1)$ より小さい．そして(13)′により

$$f(s)=\alpha_n(s-z_2)^{m_2}(s-z_3)^{m_3}\cdots(s-z_k)^{m_k}$$

1) 実変数 x の実数係数有理函数 $q(x)/p(x)$ の積分に用いる為の部分分数分解の議論では実根，虚根の区別が煩雑である．演算子法における(14)，(14)′ではその区別をする必要がなく簡単である．

である．ゆえに上の論法を分数

$$\frac{f_1(s)}{(s-z_1)^{m_1-1}f(s)}$$

に施し，これを繰返して(14)が得られる．❙

註 1　(14)における C_{ju} は，与えられた $q(s)/p(s)$ によって唯一通りに定まる．その証明は次のようにすれば，**C_{ju} の実際計算法**をも与えている．

$$\frac{q(z)}{p(z)}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{u=1}^{m_j}\frac{C_{ju}}{(z-z_j)^u} \qquad (z \text{ は複素数})$$

の両辺に $(z-z_1)^{m_1}$ を乗じて

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)^{m_1}\frac{q(z)}{p(z)}=C_{1,m_1}$$

は明らかである．次に

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)^{m_1-1}\left(\frac{q(z)}{p(z)}-\frac{C_{1,m_1}}{(z-z_1)^{m_1}}\right)=C_{1,m_1-1},$$

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)^{m_1-2}\left(\frac{q(z)}{p(z)}-\frac{C_{1,m_1}}{(z-z_1)^{m_1}}-\frac{C_{1,m_1-1}}{(z-z_1)^{m_1-1}}\right)=C_{1,m_1-2}$$

以下同様に繰返して，$C_{1,m_1-3};C_{1,m_1-4};\cdots;C_{1,1}$ が定まる．$z_2, z_3, \cdots$ に対しても同様にやるとよい．

註 2　実は $C_{1,m_1-1}=\lim_{z\to z_1}\left[\frac{d}{dz}(z-z_1)^{m_1}\frac{q(z)}{p(z)}\right];C_{1,m_1-2}=\lim_{z\to z_1}\left[\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(z-z_1)^{m_1}\frac{q(z)}{p(z)}\right];\cdots$ であることを証明できる．これを **Heaviside の展開定理**と呼んでいる本もあるが，**部分分数分解定理**を上の如くきちんと証明してあるのだから，新しくこの公式を覚える必要もあるまい．問題はむしろ，n が3, 4, 5 と大きくなると，n 次多項式 $p(z)$ の根 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ を求めて(13)を得ることの難しさにある筈だからである．

計算例 1　$\dfrac{s+\beta}{s^2(s+\alpha)}=\dfrac{a}{s^2}+\dfrac{b}{s}+\dfrac{c}{s+\alpha}$ の a, b, c を求めよ．

$$a=\lim_{z\to 0}\frac{z^2(z+\beta)}{z^2(z+\alpha)}=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$b=\lim_{z\to 0}z\left(\frac{z+\beta}{z^2(z+\alpha)}-\frac{\beta}{\alpha z^2}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\alpha z+\alpha\beta-\beta(z+\alpha)}{\alpha z(z+\alpha)}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2}$$

$$c=\lim_{z\to-\alpha}\frac{(z+\alpha)(z+\beta)}{z^2(z+\alpha)}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha^2}$$

ゆえに $\dfrac{s+\beta}{s^2(s+\alpha)}=\left\{\dfrac{\beta}{\alpha}t+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\right\}$

計算例 2　$\dfrac{s^4}{s^3-1}=s+\dfrac{s}{s^3-1}$ の右辺第2項を計算する.

$$\frac{z}{z^3-1}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-\omega}+\frac{c}{z-\omega^2},\quad \omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

1は1の3乗根.

よって

$$a=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)z}{(z^3-1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z^2+z+1}=\frac{1}{3}$$

$$b=\lim_{z\to\omega}\frac{(z-\omega)z}{(z^3-\omega^3)}=\lim_{z\to\omega}\frac{z}{z^2+\omega z+\omega^2}=\frac{\omega^2}{3}$$

$$c=\lim_{z\to\omega^2}\frac{(z-\omega^2)z}{(z^3-(\omega^2)^3)}=\lim_{z\to\omega^2}\frac{z}{z^2+\omega^2 z+\omega^4}=\frac{\omega}{3}$$

ゆえに $\dfrac{s}{s^3-1}=\dfrac{1}{3}\{e^t+\omega^2e^{\omega t}+\omega e^{\omega^2 t}\}$

計算例 3　α,β は実数として

(i)　$$\frac{I}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\left\{\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t\right\}\qquad(\beta\neq 0)$$

(ii)　$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}$$

が成り立つことを示せ.

証明

$$\frac{I}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{1}{2i\beta}\left(\frac{I}{s-\alpha-i\beta}-\frac{I}{s-\alpha+i\beta}\right)$$
$$=\frac{1}{2i\beta}\{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}\}=\left\{\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t\right\}.$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{I}{s-\alpha-i\beta}+\frac{I}{s-\alpha+i\beta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}\}=\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}$$

計算例4　前例の(i)から

$$\frac{I}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}=\left\{\frac{1}{\beta^2}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\sin\beta(t-\tau)e^{\alpha\tau}\sin\beta\tau d\tau\right\}$$

$$=\left\{\frac{-e^{\alpha t}}{2\beta^2}\int_0^t(\cos\beta t-\cos\beta(t-2\tau))d\tau\right\}$$

$$=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left(\frac{1}{\beta}\sin\beta t-t\cos\beta t\right)\right\}$$

演　習　問　題

次の公式を証明せよ[1]. (α,β は実数)

1. $$\frac{I}{(s-1)^2(s+1)(s-2)}=\frac{1}{12}\{-6te^t-3e^t-e^{-t}+4e^{2t}\}$$

2. $$\frac{I}{(s-\alpha)^2-\beta^2}=\left\{\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sinh(\beta t)\right\}\qquad(\beta\neq 0)$$

3. $$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}=\{e^{\alpha t}\cosh(\beta t)\}$$

§10　定数係数の線形常微分方程式の初期値問題の超函数的解法 ——演算子法

§7の(1)-(2)で与えられる初期値問題

(1) $$\alpha_n y^{(n)}+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+\alpha_1 y'+\alpha_0 y=f$$

(2) $$y(0)=\gamma_0,\ y'(0)=\gamma_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)=\gamma_{n-1}$$

は，定理6によって超函数方程式

(3) $$\begin{cases}(\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0 I)y\\ =f+\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0 I\\ \beta_\nu=\alpha_{\nu+1}\gamma_0+\alpha_{\nu+2}\gamma_1+\cdots+\alpha_n\gamma_{n-\nu-1}\qquad(\nu=0,1,2,\cdots,n-1)\end{cases}$$

に転換された．ここに出て来た

(11) $$p(s)=\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_0 s^0\qquad(s^0=I)$$

1) $\sinh t=\sinh(t)=(e^t-e^{-t})/2$,　$\cosh t=\cosh(t)=(e^t+e^{-t})/2$

に対して $p(z)=0$ の相異なる根 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ による因数分解を

$$(13)\qquad p(z)=\alpha_n(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_k)^{m_k},\ \sum_{j=1}^{k} m_j=n$$

とすると§9の(14)′に与えたように

$$(15)\qquad \frac{I}{p(s)}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{u=1}^{m_j} C_{ju}\left\{\frac{t^{u-1}}{(u-1)!}e^{z_jt}\right\},$$

また

$$(16)\qquad r(s)=\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0 s^0$$

に対して

$$(17)\qquad \frac{r(s)}{p(s)}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{u=1}^{m_j} d_{ju}\left\{\frac{t^{u-1}}{(u-1)!}e^{z_jt}\right\}$$

ゆえに超函数方程式(3)の両辺に $\dfrac{I}{p(s)}$ を乗じて(3)の解

$$(18)\qquad \begin{cases} y=\dfrac{I}{p(s)}f+\dfrac{r(s)}{p(s)} \\ \quad =\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\sum_{u=1}^{m_j}\left[C_{ju}\left\{\frac{t^{u-1}}{(u-1)!}e^{z_jt}\right\}f+d_{ju}\left\{\frac{t^{u-1}}{(u-1)!}e^{z_jt}\right\}\right]\end{cases}$$

が得られた.

註　$f\in C[0,\infty)$ ならば(18)に得られた $y=y(t)$ は明らかに $\in C[0,\infty)$ である. 実はこの $y(t)$ は t に関して n 回連続微分可能である[1]. その**証明**.

(3)　の両辺に h^n を乗じ

$$\alpha_n y+\alpha_{n-1}hy+\cdots+\alpha_0 h^n y=\{h^n f\}+\beta_{n-1}h+\cdots+\beta_0 h^n$$

この右辺を $\{F(t)\}$ とおくと $\{F(t)\}$ は n 回連続微分可能である. 故に

$$y=-\alpha_n{}^{-1}(\alpha_{n-1}hy+\alpha_{n-2}h^2y+\cdots+\alpha_0h^ny)+\alpha_n{}^{-1}\{F(t)\}$$

で与えられる $y(t)$ は t で1回連続微分可能で

$$y'=-\alpha_n{}^{-1}(\alpha_{n-1}hy'+\cdots+\alpha_0h^ny')+\alpha_n{}^{-1}\{F'(t)\}+(t\text{ の多項式})$$

となる. たとえば $(h^3y)'=h^2y=h^2(hy'+y(0))=h^3y'+h^2y(0)$ であるからである. 以下同様に繰返してゆくとよい. ∎

1)　だから $y(t)$ が(1), (2)の解になっているのである. Mikusiński の本にも, この点は触れていない. 偏微分方程式の場合には超函数解がない例や, 超函数解が必らずしも微分可能解にならない例がある(96頁と142頁). その意味で上の註は重要だと思うものである.

さて，(15)と(17)とは，$p(z)$ を(13)の如く因数分解してから，定理9の註に示したようにして，$\dfrac{I}{p(s)}$ および $\dfrac{r(s)}{p(s)}$ の唯一通りに定まる部分分数分解をしてから，§6の(17)を用いれば求まる．だから，微分方程式(1)-(2)を解いて**一意解** $y=y(t)$ を求める手続きは次のようにするとよい．すなわち

演算子法　まず§5の(10)すなわち

$$y' = sy-[y(0)]$$

を知っておれば，$y''=sy'-[y'(0)]=s(sy-[y(0)])-[y'(0)]=s^2y-sy(0)-y'(0)$，以下同様にして

$$y^{(k)} = s^k y-s^{k-1}y(0)-s^{k-2}y'(0)-\cdots-y^{(k-1)}(0) \tag{4}$$

は必要に応じて求められる．この(4)を用いて(1)-(2)を書き替えることによって，未知の y を含む超函数方程式(3)が得られる．

この(3)から(11)の $p(s)$ と(16)の $r(s)$ を求め，

$$y = \frac{I}{p(s)}f+\frac{r(s)}{p(s)}$$

の右辺の分数を部分分数分解して§6の(17)式すなわち

$$\frac{I}{(s-z_j)^u} = \left\{\frac{t^{u-1}}{(u-1)!}e^{z_j t}\right\} \tag{19}$$

を使えば，n 回連続微分可能な一意解 $y=\{y(t)\}$ が具体的に求められる．

例によって説明しよう．

例1　$y'+\alpha y=f$，$y(0)=a$ を解け．

解　(4)によって超函数方程式

$$sy-a+\alpha y = f$$

に書き直す．これから(19)によって

$$y = \frac{I}{s+\alpha}f+\frac{a}{s+\alpha} = \{e^{-\alpha t}\}f+\{ae^{-\alpha t}\}$$

$$= \left\{e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha u}f(u)du+ae^{-\alpha t}\right\}$$

演習　$y'-y=\{(2t-1)e^{t^2}\}$，$y(0)=2$ を解いて $y=\{e^t+e^{t^2}\}$ を求めよ．

例2　$y'+\alpha y=\beta$，$y(0)=a$ を解け．

(4)を用いて超函数方程式に書き直すとき，右辺のβは函数$\{\beta\}$であるから

$$\{\beta\} = [\beta]h = \frac{[\beta]}{s}$$

と書かなければならない!!　すなわち

$$sy-a+\alpha y = \frac{[\beta]}{s} = \frac{\beta}{s}{}^{1)}$$

$$y = \frac{1}{s+\alpha}\frac{\beta}{s}+\frac{a}{s+\alpha} = \{e^{-\alpha t}\}\{\beta e^0\}+\{ae^{-\alpha t}\}$$

$$= \left\{e^{-\alpha t}\int_0^t \beta e^{\alpha u}du+ae^{-\alpha t}\right\} = \left\{\frac{\beta}{\alpha}+\left(a-\frac{\beta}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right\}$$

例3　$y''-4y=e^{2t}$;　$y(0)=1$,　$y'(0)=\dfrac{1}{4}$ を解け.

解　(4)によって超函数方程式に書き直すと

$$s^2y-s-\frac{1}{4}-4y = \frac{1}{s-2}$$

すなわち

$$(s^2-4)y = \frac{1}{s-2}+\frac{1}{4}+s = \frac{1}{4}\frac{s+2}{s-2}+s$$

ゆえに(19)を用い

$$y = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2-4}\frac{s+2}{s-2}+\frac{s}{s^2-4} = \frac{1}{4}\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{s}{s^2-4}$$

$$= \frac{1}{4}\{te^{2t}\}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= \left\{\frac{1}{4}te^{2t}+\cosh 2t\right\}$$

例4　α,βは実数とし連立線形常微分方程式

$$\begin{cases} y'-\alpha y-\beta z = \beta e^{\alpha t}, \quad z'+\beta y-\alpha z = 0, \\ y(0) = 0, \quad z(0) = 1 \end{cases}$$

を解け.

解　(4)と(19)で超函数方程式に書き直すと

---

1)　§5の約束で$[\beta]$を改めてβと書き直したのである．ゆえに，混同がなければ，Iも1と書いて，$I/(s+\alpha)$を$1/(s+\alpha)$とする.

$$sy-\alpha y-\beta z = \frac{\beta}{s-\alpha},\quad sz-1+\beta y-\alpha z = 0$$

これを，y と z について解くと

$$y = \frac{2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2},\ z = \frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{(s-\alpha)((s-\alpha)^2+\beta^2)}$$

ゆえに§9の(i), (ii)により

$$y = \{2e^{\alpha t}\sin\beta t\}$$

$$z = \frac{2(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{1}{s-\alpha} = \{2e^{\alpha t}\cos\beta t-e^{\alpha t}\}$$

例5　$y'-y=2,\ y(1)=1$ を解け

解　$y(t+1)=z(t)$ とおくと

$$z'-z=\{2\},\quad z(0)=1$$

となるから，(4)によって超函数方程式

$$sz-1-z=\frac{2}{s}$$

となる．ゆえに(19)を用い

$$z = \frac{1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)s} = \{e^t\}+2\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)$$

$$= \{e^t+2e^t-2\} = \{3e^t-2\}$$

よって

$$y(t) = z(t-1) = \{3e^{t-1}-2\}.$$

例6　$y''+2ay'+b^2y=f(t)$; $y(0)=k_0$, $y'(0)=k_1$ を解け，ここで $a>0$, $b>0$ とする[1]．

解　(4)によって超函数方程式に書き直すと，

$$s^2y+2asy+b^2y = f(t)+sk_0+k_1+2ak_0$$

となる．よって

$$y = \frac{f}{s^2+2as+b^2}+\frac{sk_0+k_1+2ak_0}{s^2+2as+b^2}$$

1)　単位質量の質点の運動方程式．左辺第1項は加速度，第2項は速度に比例する抵抗による減衰力を示し，第3項は質点の変位に比例する弾性力を，また右辺は質点に働く外力を示す．

計算の便宜上，$b^2-a^2=\omega^2$ とおくと，$\omega\neq 0$ のとき

$$y=\frac{f}{(s+a+i\omega)(s+a-i\omega)}+\frac{(s+a)k_0+(ak_0+k_1)}{(s+a+i\omega)(s+a-i\omega)}$$

$$=\frac{-1}{2i\omega}\left(\frac{1}{s+a+i\omega}-\frac{1}{s+a-i\omega}\right)(f+ak_0+k_1)$$

$$+\frac{k_0}{2}\left(\frac{1}{s+a+i\omega}+\frac{1}{s+a-i\omega}\right)$$

$$=e^{-at}\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i\omega}(f+ak_0+k_1)$$

$$+k_0e^{-at}\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$$

$$=\left\{\frac{e^{-at}}{\omega}\int_0^t e^{a\tau}\sin\omega(t-\tau)f(\tau)d\tau\right.$$

$$\left.+\frac{ak_0+k_1}{\omega}e^{-at}\sin\omega t+k_0e^{-at}\cos\omega t\right\}$$

註 $\omega=0$ すなわち $b^2=a^2$ のときは

$$y=\frac{f+ak_0+k_1}{(s+a)^2}+\frac{(s+a)k_0}{(s+a)^2}$$

$$=\{te^{-at}\}\{f(t)\}+\{(ak_0+k_1)te^{-at}+k_0e^{-at}\}$$

演 習 問 題

1. $y''+3y'+2y=2te^{-t}$，$y(0)=y'(0)=0$ を解け．

2. $y''+3y'+2y=2te^{-t}$，$y(1)=y'(1)=0$ を解け．（ヒント：$y(t+1)=z(t)$ によって，z の微分方程式に書き改めて解け．）

3. $y'''+y'=e^{2t}$，$y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ を解け．

4. $y'+z'-z=e^t$，$2y'+z'+2z=\cos t$；$x(0)=y(0)=0$ を解け．

5. $x'=y-z$，$y'=x+y$，$z'=x+z$；$x(0)=1$，$y(0)=2$，$z(0)=3$ を解け．

6. $x'-x-2y=t$，$-2x+y'-y=t$ を初期条件 $x(0)=2$，$y(0)=4$ で解け．（ヒント：$\{t\}=h^2=I/s^2$ を用いよ．）

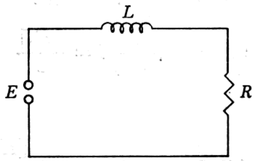
7. $x''+3y'-4x+6y=10\cos t,$

$x'+y''-2x+4y=0$

を初期条件 $x(0)=y(0)=0$, $x'(0)=4$, $y'(0)=2$ で解け.

具体例(電気回路の微分方程式)

例1　(自己)インダクタンス L, 抵抗 R の回路に一定値の起電力 E を加え, 時刻 $t=0$ において回路を閉じたとき時刻 $t>0$ における電流 $i(t)$ を求めよ.



解　Kirchhoff の法則により

$$Li'(t)+Ri(t)=E$$

初期条件 $i(0)=0$ を入れると, $i'=si$ だから超函数方程式は $E=\{E_0\}$ として

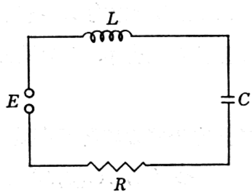
$$Lsi+Ri=\frac{E_0}{s}$$

となって, $s(Ls+R)i=E_0$ であるから

$$i=E_0\frac{I}{s(Ls+R)}=\frac{E_0}{R}\left(\frac{I}{s}-\frac{I}{s+R/L}\right)$$

ゆえに $i(t)=\dfrac{E_0}{R}\{1-e^{-(R/L)t}\}$ が得られた. ▎

例2　(自己)インダクタンス L, 抵抗 R, 容量 C の回路に一定値の起電力 E



を加える. コンデンサーの電極の荷電を Q で表わすと, 微分方程式は

$$Li'(t)+Ri(t)+\frac{Q(t)}{C}=E,\quad Q'(t)=i(t)$$

ここで，初期$t=0$における$i(0)=0$, $Q(0)=0$とすると，対応する超函数方程式は

$$Lsi+Ri+\frac{Q}{C}=E, sQ=i$$

となる．この二つからQを消去して

$$\left(Ls+R+\frac{I}{Cs}\right)i=E$$

仮定によって$E=\{E_0\}$だから$E=\frac{[E_0]}{s}$．ゆえに

$$\left(Ls+R+\frac{I}{Cs}\right)i=\frac{[E_0]}{s}$$

これから

$$\begin{cases} i=\dfrac{[E_0]}{L\left(s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{I}{LC}\right)}=\dfrac{[E_0]}{L((s+\alpha)^2+\mu)}, \\ \alpha=\dfrac{R}{2L},\ \mu=\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2} \end{cases}$$

ゆえに§6の(17)と§9の終りの(i)，演習問題2により

$$i(t)=\begin{cases} \dfrac{E_0}{L}\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\mu}\,t & (\mu>0) \\ \dfrac{E_0}{L}te^{-\alpha t} & (\mu=0) \\ \dfrac{E_0}{L}\dfrac{1}{\sqrt{-\mu}}e^{-\alpha t}\sinh\sqrt{-\mu}\,t & (\mu<0) \end{cases}$$

が得られた．任意の函数$E(t)$による起電力$E=\{E(t)\}$の場合の結果については Mikusisńki の本の邦訳（前掲）の上巻 p. 44 を見よ．

§11　定数係数の線形常微分方程式の境界値問題

問題1　$\alpha\neq 0$を実数，$t_0>0$かつ$f(t)\in C[0,t_0)$とする．このとき

(20)
$$\begin{cases} y''(t)+\alpha^2y(t)=f(t) & (0\leqq t\leqq t_0) \\ y(0)=y(t_0)=0 \end{cases}$$

の解を求む．

解　函数 f の $t \geqq t_0$ における値を $f(t)=f(t_0)$ で定義すれば $f \in \mathcal{C}=C[0,\infty)$ である．ここで β を実数とし

(21)　$$y''(t)+\alpha^2 y(t) = f(t),\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=\beta$$

の解 y を求めて見よう．

§10 の (4) によって，超函数方程式

$$s^2 y-\beta+\alpha^2 y = f$$

に書き直す，これを y について解くと，§10 の (19) 式によって

$$\begin{aligned} y &= \frac{\beta}{s^2+\alpha^2}+\frac{f}{s^2+\alpha^2} \\ &= \frac{\beta}{2i\alpha}\left(\frac{I}{s-i\alpha}-\frac{I}{s+i\alpha}\right)+\frac{1}{2i\alpha}\left(\frac{I}{s-i\alpha}-\frac{I}{s+i\alpha}\right)f \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left\{\frac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}\right\}+\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}\right\}f \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\{\sin \alpha t\}+\frac{1}{\alpha}\left\{\int_0^t \sin \alpha(t-u)f(u)du\right\} \end{aligned}$$

すなわち (21) の解 $y(t)$ は次式で与えられる．

(22)　$$y(t) = \frac{\beta}{\alpha}\{\sin \alpha t\}+\frac{1}{\alpha}\left\{\int_0^t \sin \alpha(t-u)f(u)du\right\}$$

この $y(t)$ が (20) の解である為の条件 $y(t_0)=0$ を調べる為に二つの場合を区別する．

i)　$\sin \alpha t_0 \neq 0$ のとき，このときは $y(t_0)=0$ は

(23)　$$\frac{\beta}{\alpha}\sin \alpha t_0+\frac{1}{\alpha}\int_0^{t_0} \sin \alpha(t_0-u)f(u) = 0$$

と同等になるので，$\sin \alpha t_0 \neq 0$ によって (23) から β が一意的に定まる．この β を用いて (20) の解 (22) が求まったわけである．

ii)　$\sin \alpha t_0 = 0$ のとき，このときは $y(t_0)=0$ から

$$\int_0^{t_0} \sin \alpha(t_0-u)f(u) = 0$$

そして $\sin \alpha(t_0-u)=\sin \alpha t_0\cdot\cos \alpha u-\cos \alpha t_0\cdot\sin \alpha u=-\cos \alpha t_0\cdot\sin \alpha u$ であるから

(24)
$$\int_0^{t_0} \sin \alpha u \cdot f(u)du = 0$$

が成り立たなければならない.

そして(24)が成り立てば——勿論 $\sin \alpha t_0=0$ の場合においてである——すべての β に対して(22)に与えられた $y(t)$ が(20)の解になっているのである.

ゆえに $\sin \alpha t_0=0$ の場合には，(20)の f が(24)を成り立たせないならば(20)の解 y は存在しない.

註　$f(t)\equiv 0$ ならば(24)は当然成り立っているので $\sin \alpha t_0=0$ となる $\alpha \neq 0$ に対して(20)の解があるわけである．ところでこのような実数 $\alpha \neq 0$ は，

(25)
$$y''(t)+\alpha^2 y(t) = 0,\ \ y(0) = y(t_0) = 0$$

が恒等的に0でない解

$$y(t) = \sin \alpha t$$

をもつということで特徴付けられる．すなわち，実数 $\alpha \neq 0$ が境界値問題(25)の固有値であるということにあたるのである.

問題2　次の問題は解をもつか.

(26)
$$y''(t)+\alpha^2 y(t) = 0;\ \ y(0) = 0,\ \ y(2\pi) = 1$$

解　(26)の解 $y(t)$ は(22)において $f=0$ とした $y(t)=\dfrac{\beta}{\alpha}\sin \alpha t$ である.

ゆえに(26)が解をもつためには，2α が偶数であってはならない．そして $2\alpha \neq$ 偶数のとき解は $y(t)=\dfrac{\sin \alpha t}{\sin 2\alpha\pi}$ である.

問題3　次の問題は解をもつか.

(27)
$$y''(t)-\alpha^2 y(t) = 0;\ \ y(0) = 0,\ \ y(2\pi) = 1$$

解　この方程式を初期条件 $y(0)=0, y'(0)=\beta$ で解くと($\alpha>0$ としておいて)

$$y = \frac{\beta}{s^2-\alpha^2} = \frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{I}{s-\alpha}-\frac{I}{s+\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right\}$$

ゆえに $y(2\pi)=1$ となるためには

$$\beta = \frac{\alpha}{\sinh(2\alpha\pi)},\ \ y(t) = \frac{\sinh(\alpha t)}{\sinh(2\alpha\pi)}$$

とすればよい.

演 習 問 題

1. $y''+\alpha^2 y=0$； $y(0)=0$， $y'(2\pi)=1$ の解を調べよ．（α は実数）

2. $y''-\alpha^2 y=0$； $y(0)=0$， $y'(2\pi)=1$ の解を調べよ．（α は実数）

第4章　超函数 $h, s, \dfrac{I}{(s-\alpha)}$ などの分数幂

§12　Euler[1] 積分．ガンマ函数とベータ函数

標題の二つの函数は

(1)　$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt \qquad (\lambda>0)$$

(2)　$$B(\lambda,\mu)=\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt \qquad (\lambda>0,\mu>0)$$

で与えられる．

定理 10

(3)　$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda),$$

(4)　$$\Gamma(n)=(n-1)! \qquad (n=1,2,\cdots),$$

(5)　$$B(\lambda,\mu)=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)},$$

(6)　$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

証明　部分積分によって

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt=\left[\frac{t^\lambda}{\lambda}e^{-t}\right]_{t=0}^\infty+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty t^\lambda e^{-t}dt=\frac{1}{\lambda}\Gamma(\lambda+1)$$

これで(3)が証明された．

(4)の証明　$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=[-e^{-t}]_{t=0}^\infty=1.$ したがって(3)によって順次

1)　オイラー(L. Euler, 1707–1783)

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1!,\quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!,$$

以下 $\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3!,\cdots$とすすみ数学的帰納法によって $\Gamma(n)=(n-1)!$.

(5)の証明

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}u^{\mu-1}e^{-\mu}dtdu$$

ここで変数 t, u を

(7)　　$t=\tau v,\quad u=(1-\tau)v\qquad (0<\tau<1,\ v>0)$

によって新しい変数τ, vに変換すると，この変換の函数行列式(ヤコビアン(Jacobian))は

$$\frac{D(t,u)}{D(\tau,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\tau v}{\partial\tau}, & \dfrac{\partial(1-\tau)v}{\partial\tau}\\[2ex] \dfrac{\partial\tau v}{\partial v}, & \dfrac{\partial(1-\tau)v}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v, & -v\\ \tau, & (1-\tau)\end{vmatrix}=v$$

であるから

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)=\int_0^1 d\tau\int_0^\infty dv\,\{(\tau v)^{\lambda-1}e^{-\tau v}((1-\tau)v)^{\mu-1}e^{-(1-\tau)v}\cdot v\}$$

$$=\int_0^1\tau^{\lambda-1}(1-\tau)^{\mu-1}d\tau\int_0^\infty v^{\lambda+\mu-1}e^{-v}dv=B(\lambda,\mu)\Gamma(\lambda+\mu)$$

(6)の証明　(4)と(5)とから

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt$$

$$=1\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt=\int_0^1\frac{2xdx}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$$

$$=\int_0^1\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}=2[\arcsin x]_{x=0}^{x=1}=\pi$$

ゆえに$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\pm\sqrt{\pi}$. しかし$\Gamma(\lambda)$は正値函数の積分として正値である．よって$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

系 1

(7)′　　$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

証明　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt$. ここで変数変換 $t=\tau^2$ を施して

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \tau^{-1}e^{-\tau^2}\cdot 2\tau d\tau = 2\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau$$

すなわち(6)から

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \blacksquare$$

系2　n が正の整数とすると

(8)
$$B(\lambda, n) = \frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}$$

証明　$B(\lambda, 1)=\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^0dt=\frac{1}{\lambda}$ である．そして部分積分で

$$B(\lambda, n) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{n-1}dt = \left[\frac{t^\lambda}{\lambda}(1-t)^{n-1}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{t^\lambda}{\lambda}(n-1)(1-t)^{n-2}dt$$

$$= \frac{n-1}{\lambda}\int_0^1 t^\lambda(1-t)^{n-2}dt = \frac{n-1}{\lambda}B(\lambda+1, n-1)$$

したがって，$B(\lambda, 1)=\frac{1}{\lambda}$ を用い

$$B(\lambda, n) = \frac{n-1}{\lambda}\frac{n-2}{\lambda+1}B(\lambda+2, n-2)$$

$$= \frac{n-1}{\lambda}\frac{n-2}{\lambda+1}\frac{n-3}{\lambda+2}\cdots\frac{1}{\lambda+n-2}B(\lambda+n-1, 1)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)} \qquad \blacksquare$$

§13　超函数 $h, (s-\alpha)^{-1}, (s-\alpha)$ の分数幂

h の分数幂　さきに§2の(10)に

$$h^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \left\{\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\right\} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

を与えた．ガンマ函数を用いてこれを任意の正数 λ に対する h^λ に拡張する：

(9)
$$\begin{cases} h^\lambda = \left\{\dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\} = s\left(h\left\{\dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}\right), & (\lambda>1), \\[2ex] h^\lambda = s\left(h\left\{\dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}\right), & (1>\lambda>0) \end{cases}$$

このようにしてh^λは$\in\mathcal{C}_H$すなわち**超函数**であり，特に$\lambda\geqq 1$であるh^λは$\in\mathcal{C}$である.

(9)に与えたh^λ($\lambda\geqq 0$; ただし$h^0=I=1$)をhの**一般冪**または**分数冪**(fractional power)ということがある. $\lambda>0$のなかに**分数**$\dfrac{m}{n}$(n, mは正の整数)があるからである.

命題9　$f\in\mathcal{C}$に対して

$$\{h^\lambda f(t)\} = \left\{\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t (t-u)^{\lambda-1}f(u)du\right\}\in\mathcal{C} \tag{10}$$

証明　§1の(7)における合成積についての結合律

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

を得たと全く同じようにして

$$\left(h*\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}\right)\{f(t)\} = h*\left(\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}\{f(t)\}\right)$$

を得るから，$sh=I$によって

$$h^\lambda f = \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}\{f(t)\} = \left\{\int_0^t \frac{(t-u)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}f(u)du\right\}$$ ∎

註　$h^\lambda f$を，$0<\lambda<1$のとき，函数$f\in\mathcal{C}$の**分数冪積分**(fractional integration)と呼ぶことがある.

例　$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$と$(t-u)^{1/2-1}=\dfrac{1}{\sqrt{t-u}}$により

$$(h^{1/2}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-u}}f(u)du \tag{11}$$

$(s-\alpha)^{-1}=\dfrac{I}{s-\alpha}$の分数冪　§6の定理5′によって§6の(17)式

$$(s-\alpha)^{-n} = \left(\frac{I}{(s-\alpha)}\right)^n = \frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{\alpha t}\right\}$$

が得られた. ガンマ函数を用い，これを任意の正数λに対する$(s-\alpha)^{-\lambda}=\left(\dfrac{I}{s-\alpha}\right)^\lambda$に拡張する. すなわち，次の通り:

$$\begin{cases} (s-\alpha)^{-\lambda} = \left\{\dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\} = s\left(h\left\{\dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}\right) & (\lambda\geqq 1\text{のとき}), \\ (s-\alpha)^{-\lambda} = s\left(h\left\{\dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}\right), & (1>\lambda>0) \end{cases} \tag{12}$$

このようにして $(s-\alpha)^{-\lambda}$ は $\in\mathcal{C}_H$ すなわち超函数であり，とくに $\lambda\geqq 1$ なる $(s-\alpha)^{-\lambda}$ は $\in\mathcal{C}$ である.

命題 9′　命題 9 と同じようにして，$f\in\mathcal{C}$ ならば

(13) $$\{(s-\alpha)^{-\lambda}f(t)\}=\left\{\int_0^t\frac{(t-u)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha(t-u)}f(u)du\right\}\in\mathcal{C}$$

定理 11

(14) $$(s-\alpha)^{-\lambda}(s-\alpha)^{-\mu}=(s-\alpha)^{-\lambda-\mu},\quad(\lambda,\mu>0)$$

証明

$$(s-\alpha)^{-\lambda}(s-\alpha)^{-\mu}=s\left\{h\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}s\left\{h\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}e^{\alpha t}\right\}$$

を計算するときに，環 $\mathcal{C}$ や環 $\mathcal{C}_H$ における乗法が可換であり，かつ結合律に従うことから

$$=s^2\left(\left\{h\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}\left\{h\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}e^{\alpha t}\right\}\right.$$

$$=s^2h^2\left\{\int_0^t\frac{(t-u)^{\lambda-1}e^{\alpha(t-u)}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}u^{\mu-1}e^{\alpha u}du\right\}$$

$$=\left.\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\left\{e^{\alpha t}\int_0^t(t-u)^{\lambda-1}u^{\mu-1}du\right\}\right)$$

ここで $t-u=tw$ によって積分変数の変換 $u\to w$ を行なうと

$$=\frac{-1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\left\{\int_1^0(tw)^{\lambda-1}(t-tw)^{\mu-1}te^{\alpha t}dw\right\}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\{t^{\lambda+\mu-1}e^{\alpha t}\}\cdot\int_0^1 w^{\lambda-1}(1-w)^{\mu-1}dw$$

この右辺の積分 $B(\lambda,\mu)$ は定理 10 の (5) により $\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)/\Gamma(\lambda+\mu)$ に等しいから，

$$(s-\alpha)^{-\lambda}(s-\alpha)^{-\mu}=\left\{\frac{t^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)}e^{\alpha t}\right\}$$ ∎

系　$\alpha=0$ のときは

(15) $$s^{-\lambda}=\left(\frac{I}{s}\right)^{\lambda}=\left(\frac{1}{s}\right)^{\lambda}=h^{\lambda}\qquad(\lambda>0)$$

であるから

(16) $$h^{\lambda}h^{\mu}=h^{\lambda+\mu},\quad h^0=I\qquad(\lambda,\mu>0)$$

$(s-\alpha)$ の分数冪 $(s-\alpha)^\lambda\ (0<\lambda<1)$

命題 10　$0<\lambda<1$ として

$$(17)\qquad (s-\alpha)^\lambda = (s-\alpha)s\left\{he^{\alpha t}\frac{t^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}\right\}\in \mathscr{C}_H$$

と定義すれば

$$(18)\qquad (s-\alpha)^\lambda(s-\lambda)^{-\lambda} = I \qquad (0<\lambda<1)$$

証明　(14) の証明と似ている．(17) と (12) により

$$(s-\alpha)^\lambda(s-\alpha)^{-\lambda} = (s-\alpha)\left\{e^{\alpha t}\frac{t^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}\right\}\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}$$

$$= \frac{(s-\alpha)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)}\left\{\int_0^t e^{\alpha(t-u)}(t-u)^{-\lambda}u^{\lambda-1}e^{\alpha u}du\right\}$$

$t-u=tw$ によって変数変換 $u\to w$ をすると

$$= \frac{(s-\alpha)\{e^{\alpha t}\}}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)}\int_0^t t^{-\lambda}w^{-\lambda}t^{\lambda-1}(1-w)^{\lambda-1}tdw$$

$$= \frac{I}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)}B(1-\lambda,\lambda) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\lambda)}\frac{I}{\Gamma(1)} = I$$

∎

系　任意の $\lambda>0$ を，整数 $n\geqq 0$ と $0\leqq\lambda_0<1$ である λ_0 との和として，$\lambda=n+\lambda_0$ と書くと，$(s-\alpha)^0=I$ として

$$(19)\qquad (s-\alpha)^\lambda = (s-\alpha)^n(s-\alpha)^{\lambda_0}$$

によって定義された $(s-\alpha)^\lambda$ に対して

$$(20)\qquad (s-\alpha)^\lambda = \frac{I}{(s-\alpha)^{-\lambda}},\quad (s-\alpha)^{-\lambda} = \frac{I}{(s-\alpha)^\lambda},$$

$$(21)\qquad (s-\alpha)^\lambda(s-\lambda)^\mu = (s-\alpha)^{\lambda+\mu} \qquad (\lambda,\mu>0)$$

が成り立つ．

証明　(14) により $(s-\alpha)^{-n}(s-\alpha)^{-\lambda_0}=(s-\alpha)^{-\lambda}$．そうして $(s-\alpha)^{-n}=\left(\dfrac{I}{s-\alpha}\right)^n$ $=\dfrac{I}{(s-\alpha)^n}$．また (18) によって $(s-\alpha)^{-\lambda_0}=\dfrac{I}{(s-\alpha)^{\lambda_0}}$．ゆえに，

$$(s-\alpha)^\lambda(s-\alpha)^{-\lambda} = (s-\alpha)^n(s-\alpha)^{\lambda_0}(s-\alpha)^{-n}(s-\alpha)^{-\lambda_0} \qquad ((14)\text{ から})$$

$$= (s-\alpha)^n(s-\alpha)^{-n}(s-\alpha)^{\lambda_0}(s-\alpha)^{-\lambda_0}$$

$$= I\cdot I = I$$

となる．その上 $(s-\alpha)^n$，$(s-\alpha)^{\lambda_0}$ ともに $\in \mathcal{C}_H$ だから，$(s-\alpha)^\lambda \in \mathcal{C}_H$．また $(s-\alpha)^{-\lambda}$ も $\in \mathcal{C}_H$ だから，結局，$(s-\alpha)^\lambda$ と $(s-\alpha)^{-\lambda}$ とは環 $\mathcal{C}_H$ の乗法の意味で互いに逆元になっているので，(20) が成り立つ．

最後に (14) から $(s-\alpha)^{-\lambda}(s-\alpha)^{-\mu}=(s-\alpha)^{-\lambda-\mu}$ なので

$$(s-\alpha)^\lambda(s-\alpha)^\mu = \frac{I}{(s-\alpha)^{-\lambda}}\,\frac{I}{(s-\alpha)^{-\mu}} = \frac{I}{(s-\alpha)^{-\lambda-\mu}}$$

であり，(20) から得られる

$$(s-\alpha)^{\lambda+\mu} = \frac{I}{(s-\alpha)^{-\lambda-\mu}}$$

と比較して (21) を得る．▮

応用例

(22)
$$\frac{I}{s\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{-u^2}du\right\} \qquad (\alpha>0)$$

証明　$\dfrac{I}{\sqrt{s+\alpha}} = (s+\alpha)^{-1/2} = s\left\{h\dfrac{t^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)}e^{-\alpha t}\right\}$ から

$$\frac{I}{s\sqrt{s+\alpha}} = h\frac{I}{\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\int_0^t \frac{u^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha u}du\right\}$$

$$= \left\{\int_0^{\sqrt{\alpha t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-1} e^{-v^2}\cdot 2\frac{v}{\alpha}dv\right\}$$ ▮

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Erf}\sqrt{\alpha t}\right\}^{1)}$$

練習　$\alpha>0$ とし次式を証明せよ．

$$\frac{I}{\sqrt{s}\,(s-\alpha)} = \left\{\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Erf}\sqrt{\alpha t}\right\}$$

---

1)　$\mathrm{Erf}\,t = \mathrm{Erf}(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{-v^2}dv$ は誤差函数 (error function) と呼ばれるものである．

第5章　超函数 h の無限冪級数で表わされる超函数

§14　一般2項定理

あとから必要となってくる標題について述べる．すなわち**一般2項定理**:

定理12　任意の実数 α に対して，

(1)
$$(1+t)^{\alpha} = 1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots+\alpha_n t^n+\cdots$$

という無限冪級数展開が $-1<t<1$ なるすべての t で収束する[1]．ここに

(2)
$$\alpha_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}, \qquad (k=1,2,\cdots)$$

証明　第1段 (1) の右辺の $(n-1)$ 次までの式を $P_n(t)$ と書く:

(3)
$$P_n(t) = 1+\alpha_1 t+\alpha_2 t+\cdots+\alpha_{n-1}t^{n-1}$$

このとき

(3)′
$$\alpha P_n(t)-(1+t)P_n'(t) = n\alpha_n t^{n-1}$$

が成り立つ．**証明**はつぎの通り，まず (2) から

(4)
$$n\alpha_n = (\alpha-n+1)\alpha_{n-1}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&\alpha P_n(t)-(1+t)P_n'(t)\\
&\quad = \alpha(\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_1 t+1)\\
&\qquad -(1+t)((n-1)\alpha_{n-1}t^{n-2}+(n-2)\alpha_{n-2}t^{n-3}+\cdots+2\alpha_2 t+\alpha_1)\\
&\quad = (\alpha\alpha_{n-1}-(n-1)\alpha_{n-1})t^{n-1}
\end{aligned}$$

---

1)　ただし $\alpha=$ 正の整数 n のときには，(1)の右辺は t の n 次多項式になることは周知であろう．

$$+(\alpha\alpha_{n-2}-(n-1)\alpha_{n-1}-(n-2)\alpha_{n-2})t^{n-2}$$
$$+(\alpha\alpha_{n-3}-(n-2)\alpha_{n-2}-(n-3)\alpha_{n-3})t^{n-3}+\cdots$$
$$+(\alpha\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_1)t+(\alpha-\alpha_1)$$

右辺の t^{n-1} の係数は(4)によって $n\alpha_n$ に等しい．そして右辺の他の項 $t^{n-2}, t^{n-3}, \cdots, t$ および $t^0=1$ の係数は，すべて(4)によって0になる．

<u>第2段</u>　(3)′によって

$$\frac{d}{dt}\frac{P_n(t)}{(1+t)^\alpha}=\frac{(1+t)P_n'(t)-\alpha P_n(t)}{(1+t)^{\alpha+1}}=-\frac{n\alpha_n t^{n-1}}{(1+t)^{\alpha+1}}$$

を得る．これを積分して

$$\frac{P_n(t)}{(1+t)^\alpha}-1=-n\alpha_n\int_0^t\frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{\alpha+1}}d\tau \qquad (-1<t<1)$$

すなわち

$$(5)\qquad (1+t)^\alpha=P_n(t)+n\alpha_n(1+t)^\alpha\int_0^t\frac{u^{n-1}}{(1+u)^{\alpha+1}}du$$

<u>第3段</u>　$t(-1<t<1)$ の値を定めたときに，

$$(6)\qquad \lim_{n\to+\infty}n\alpha_n(1+t)^\alpha\int_0^t\frac{u^{n-1}}{(1+u)^{\alpha+1}}du=0$$

を証明する為にこれを書き直す．

t と α とを定めると，$\dfrac{1}{(1+u)^{\alpha+1}}$ は u が0から t まで動くときに増加(または減少)する[1]．簡単の為に，$t>0$ で $\alpha+1>0$ であるように t と α とが与えられていたとすると，$\dfrac{1}{(1+u)^{\alpha+1}}$ は u が0から t まで動くときに減少する．ゆえに

$$\int_0^t u^{n-1}du>\int_0^t\frac{u^{n-1}}{(1+u)^{\alpha+1}}du>\frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}}\int_0^t u^{n-1}du$$

である．だから $t>0$ と $\alpha+1>0$ を固定しておくと，$0\leqq\theta\leqq1$ で θ の減少函数

$$\frac{1}{(1+\theta t)^{\alpha+1}}\int_0^t u^{n-1}du=\frac{t^n}{n(1+\theta t)^{\alpha+1}}$$

が，$0<\theta_0<1$ である適当な θ_0 に対して

$$\frac{t^n}{n(1+\theta_0 t)^{\alpha+1}}=\int_0^t\frac{u^{n-1}}{(1+u)^{\alpha+1}}du$$

1)　$\alpha=-1$ のときには $1/(1+u)^{\alpha+1}=1$ となるが，それはあとから出てくる結果には影響しない．

ゆえに(6)の代りに

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(1+t)^{\alpha}\frac{t^n}{(1+\theta_0 t)^{\alpha+1}}=0 \tag{7}$$

を証明するとよい．

第4段　上の(7)は，$-1<t<1$ であれば，すべての実数αに対して適用できる($\alpha=-1$ のときは $\theta_0=0$ とすればよい)．

そこで $|t|<1$ である t と α とを固定すると，

$$\frac{(1+t)^{\alpha}}{(1+\theta_0 t)^{\alpha+1}}$$

は定まった数である．そうして

$$|\alpha_n t^n|=\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\alpha-k+1}{k}t\right|\leqq\prod_{k=1}^{n}\left|\left(1+\frac{|\alpha|+1}{k}\right)t\right|$$

$|t|<1$ であるから，十分大きい k_0 に対して

$$\left|\left(1+\frac{|\alpha|+1}{k_0}\right)t\right|=\delta<1,\ \text{したがって}\ k\geqq k_0\ \text{ならば}$$

$$\left|\left(1+\frac{|\alpha|+1}{k}\right)t\right|\leqq\delta\ \text{となるので}$$

$$\left|\alpha_n(1+t)^{\alpha}\frac{t^n}{(1+\theta_0 t)^{\alpha+1}}\right|$$
$$\leqq\frac{|1+t|^{\alpha}}{|1+\theta_0 t|^{\alpha+1}}\prod_{k=1}^{k_0}\left(1+\frac{|\alpha|+1}{k}\right)|t|^{k_0}\times\delta^{(n-k_0)}$$

であり，$0<\delta<1$ によって $\lim_{n\to\infty}\delta^{(n-k_0)}=0$ となる．ゆえに(7)が証明された．▌

2項展開(1)の例

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots$$

$$\frac{1}{(1+t)^2}=1-2t+3t^2-4t^3+\cdots$$

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2\cdot 4}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}t^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}t^4+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}}=1-\frac{1}{2}t+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}t^4-\cdots$$

§15　Bessel[1] 函数 $J_n(t)$

n 次の第1種 Bessel 函数——円筒函数(cylinder function)ともいう——は，

(8)
$$J_n(t)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2\mu}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

で与えられ，**Bessel 微分方程式**と呼ばれる

(9)
$$y''+\frac{1}{t}y'+\left(1-\frac{n^2}{t^2}\right)y=0$$

の解で

(10)
$$y(t)=C_0t^n+C_2t^{n+2}+C_4t^{n+4}+\cdots+C_{2\mu}t^{n+2\mu}+\cdots,\quad C_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$$

と冪級数展開されるものとして求められる.

証明　(10)が形式的に(9)を満足するとすれば，

$$y''=n(n-1)C_0t^{n-2}+(n+2)(n+1)C_2y^n+\cdots+$$
$$(n+2\mu)(n+2\mu-1)C_{2\mu}t^{n+2\mu-2}+\cdots$$
$$t^{-1}y'=nC_0t^{n-2}+(n+2)C_2t^n+\cdots+(n+2\mu)C_{2\mu}t^{n+2\mu-2}+\cdots$$
$$y=C_0t^n+C_2t^{n+2}+\cdots+C_{2\mu}t^{n+2\mu}+\cdots$$
$$-\frac{n^2}{t^2}y=-n^2C_0t^{n-2}-n^2C_2t^n-\cdots-n^2C_{2\mu}t^{n+2\mu-2}-\cdots$$

を加え合せて0にするために，$t^{n+2\mu-2}$ の係数を0とおいて

$$((n+2\mu)^2-n^2)C_{2\mu}+C_{2(\mu-1)}=0$$

を得る．これから

$$C_{2\mu}=\frac{-1}{(2n+2\mu)2\mu}C_{2(\mu-1)}$$

となり，$C_0=\dfrac{1}{2n\cdot\Gamma(n+1)}$ と組み合せて

(8)′
$$C_{2\mu}=\frac{(-1)^\mu}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2\mu}$$

が得られる．❙

註　t の冪級数(8)が t を固定したところでは必らず収束すること——(8)が

1)　ベッセル(F. W. Bessel, 1784–1846)

t の整函数(entire function)であること——は次のようにしてわかる.

t を固定したときに，正の整数 $k_0>1$ を

$$\frac{t}{2k_0}=\delta<\frac{1}{2}$$

となるようにとると，$k>k_0$ ならば

$$\left|\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}\right|$$
$$\leqq\prod_{\mu=1}^{k_0-1}\left|\frac{1}{(n+\mu)}\frac{t}{2}\right|\cdot\left|\frac{1}{\mu}\frac{t}{2}\right|\times\left|\frac{t}{2}\right|^n\times\delta^{2(k-k_0+1)}$$

となるので

$$\sum_{\mu=k_0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^\mu}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2\mu}\right|$$
$$\leqq\left|\frac{t}{2}\right|^n\prod_{\mu=1}^{k_0-1}\left|\frac{1}{n+\mu}\frac{t}{2}\right|\cdot\left|\frac{1}{\mu}\frac{t}{2}\right|\times\left(\sum_{k=k_0}^{\infty}\delta^{2(k-k_0+1)}\right)$$

の右辺が収束する[1].

よって(10)は実際に(形式的ではなく)(9)を満足するのである.

§16　$\mathscr{C}_H$ の拡張としての $\mathscr{C}_P$

恒等的に0ではない t の多項式 p の全体を P と書くことにする．命題3(§3)を用いて

$$\mathscr{C}_H=\left\{\frac{f}{k};\ k=h^n\in H(n=1,2,\cdots),\ f\in\mathscr{C}\right\}$$

を定義したように

$$\mathscr{C}_P=\left\{\frac{f}{p};\ p\in P,\ f\in\mathscr{C}\right\}$$

を定義する為に次の命題3′を用意する.

命題3′　$p\in P$ かつ $f\in\mathscr{C}=C[0,\infty)$ であるとき，$pf=0$ ならば $f=0$.

---

1)　t の冪級数は，その収束する点 $t=t_0$ と任意の $\varepsilon>0$(ただし $|t_0|>\varepsilon$)とに対して $|t|\leqq|t_0|-\varepsilon$ となる t の範囲では一様収束して t の連続函数になる．しかもこの函数は，$|t|\leqq|t_0|-\varepsilon$ において何回でも微分可能でその微分は級数の項別微分で求められる.

証明[1] <u>第１段</u> 複素数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$に対して作った多項式

$$t^n + \frac{\alpha_1}{n} t^{n-1} + \frac{\alpha_2}{n(n-1)} t^{n-2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{n!} \tag{11}$$

の根を$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$とすると[2]，第１章§2の(10)により

$$\begin{cases} (n!)^{-1}\{1\}^{1-n}\{t^n + [\alpha_1]t^{n-1} + \cdots + [\alpha_{n-1}]t + \alpha_n\} \\ = \{t-\beta_1\}\{t-\beta_2\}\cdots\{t-\beta_n\} \end{cases} \tag{12}$$

実際，$\{t^n + [\alpha_1]t^{n-1} + \cdots + [\alpha_{n-1}]t + \alpha_n\}$

$$\begin{aligned} &= n!h^{n+1} + (n-1)![\alpha_1]h^n + \cdots + [\alpha_{n-1}]h^2 + [\alpha_n]h \\ &= n!h\left(h^n + \left[\frac{\alpha_1}{n}\right]h^{n-1} + \cdots + \left[\frac{\alpha_{n-1}}{n\cdots 2}\right]h + \frac{[\alpha_n]}{n!}\right) \\ &= n!h(h-[\beta_1])(h-[\beta_2])\cdots(h-[\beta_n]) \\ &= n!h^{1-n}(h^2-\{\beta_1\})(h^2-\{\beta_2\})\cdots(h^2-\{\beta_n\}) \\ &= n!h^{1-n}\{t-\beta_1\}\{t-\beta_2\}\cdots\{t-\beta_n\} \end{aligned}$$

第２段 pが１次多項式で$p=\{t-\alpha\}$のときには

$$pf = \left\{\int_0^t (t-u-\alpha)f(u)du\right\}$$

の両辺をtについて微分して

$$(t-t-\alpha)f(t) + \int_0^t f(u)du \quad \text{すなわち}$$

$$\int_0^t f(u)du = \alpha f(t)$$

これを微分して，$\alpha \neq 0$ならば$f(t)=\alpha f'(t)$. このときは上式で$t=0$とおいて$0=\alpha f(0)$から$f(0)=0$. したがって$\alpha \neq 0$と

$$f(t) = \alpha f'(t),\ f(0) = 0 \quad \text{から} \quad f(t) \equiv 0.$$

若し$\alpha=0$ならば，$\int_0^t f(u)du=0$をtで微分して$f(t)\equiv 0$.

<u>第３段</u> pがn次$(n \geqq 2)$のときには，(12)を用いnに対する帰納法で，$pf=0$ならば$f(t)\equiv 0$. ❙

---

1) 岡本周一による．Shuichi Okamoto: A simplified derivation of Mikusiński's operational calculus, Proc. Jap. Acad. 50, Ser. A, No. 1 (1979), 1–5.

2) 例えばβ_1が３重根とすると，$\beta_1=\beta_2=\beta_3$のように書く．

$\mathscr{C}_P$ の定義　$\mathscr{C}=C[0,\infty)$ から $\mathscr{C}_H$ を作ったと同じようにして

$$\mathscr{C}_P=\left\{\frac{f}{p};\ p\in P,\ f\in\mathscr{C}\right\} \tag{13}$$

を定義する．$h^n=t^{n-1}/(n-1)!\in P$ であるから，$\mathscr{C}_H$ は乗法に関して可換な環 $\mathscr{C}_P$:

$$\frac{f_1}{p_1}+\frac{f_2}{p_2}=\frac{f_1p_2+f_2p_1}{p_1p_2},\ \frac{f_1}{p_1}\cdot\frac{f_2}{p_2}=\frac{f_1f_2}{p_1p_2}$$

の部分環を成している．（なお，p. 57 の註をみよ.）

注意　われわれは，さきに s の多項式環が零因子をもたないことに基づき，s の多項式による分数（分母は s の多項式で 0 でないもの）すなわち s の有理式を考えた．これについて

定理 7′　$p(s), q(s)$ を，それぞれ s の n 次および m 次多項式で $n\leqq m$ とする．このとき分数 $q(s)/p(s)$ は次のように表現される：

$$\frac{q(s)}{p(s)}=w(s)+\frac{r(s)}{p(s)} \tag{14}$$

ここに，w は s の $(m-n)$ 次多項式かつ $r(s)$ は s の高々 $(n-1)$ 次多項式である．

証明　複素数 C_0 を，s の多項式

$$q(s)-C_0s^{m-n}p(s)$$

が高々 $(m-1)$ 次になるように定める．そして $m-1<n$ ならば，

$$w(s)=C_0s^{m-n},\ \ r(s)=q(s)-C_0s^{m-n}p(s)$$

として(14)が成り立つ．

もし未だ $m-1\geqq n$ ならば，複素数 C_1 を，

$$(q(s)-C_0s^{m-n}p(s))-C_1s^{m-n-1}p(s)$$

が s の高々 $(m-2)$ 次多項式になるように定める．以下同様に繰返して

$$w(s)=C_0s^{m-n}+C_1s^{m-n-1}+\cdots,$$
$$r(s)=q(s)-w(s)p(s)$$

とすればよい．▎

系　s の多項式 $w(s)$ は $\in\mathscr{C}_H$ であり，また§9の定理9によって $r(s)/p(s)$ の

ような分数は $\mathscr{C}=C[0,\infty)$ に属する函数になる．$\mathscr{C}\subseteqq\mathscr{C}_H$ であるから，結局 s の有理式 $q(s)/p(s)$ は $\mathscr{C}_H$ に属する超函数と考えてよい．

例

$$\frac{s^3}{s^2-1}=s+\frac{s}{s^2-1}=s+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right)=s+\left\{\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right\}\in\mathscr{C}_H$$

§17　超函数 h の無限冪級数で表わされる超函数

定理 13　複素数係数の冪級数

(15)
$$\alpha_0+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\cdots+\alpha_nz^n+\cdots$$

が，z の或る値 $z_0\neq0$ において収束するとする．このとき，z のところを h とした

(16)
$$\alpha_0h^0+\alpha_1h+\alpha_2h^2+\cdots+\alpha_nh^n+\cdots$$

において，$h^n=\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$ とした

(17)
$$\alpha_0I+\left(\alpha_1\{1\}+\alpha_2t+\cdots+\alpha_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots\right)$$

の(　)内の t の冪級数は，すべての $t\geqq0$ で収束するから(　)は $C[0,\infty)$ の函数を定義する．すなわち(16)は超函数 $\in\mathscr{C}_H$ を定める．

証明　(15)が $z=z_0$ で収束するから，この級数の一般項 α_nz^n について

(18)
$$\sup_{n\geqq0}|\alpha_nz_0{}^n|=M<\infty$$

である．収束するということから，任意の正数 ε に対して，十分大きい $n_0=n_0(\varepsilon)$ を定めると

$$n\geqq n_0 \text{ であるすべての } n \text{ に対して } |\alpha_nz_0{}^n|\leqq\varepsilon$$

ゆえに

$$M=|\alpha_0|,|\alpha_1z_0|,\cdots,|\alpha_nz_0{}^{n_0}|,\varepsilon \text{ の最大値}$$

とすれば(18)が成り立つのである．

ゆえに $z_0\neq0$ から

$$|\alpha_n|\leqq\frac{M}{|z_0|^n}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

ここで，§15においてやったように，与えられた $t\geqq0$ に対して十分大きな自然

数k_0を，

$$\frac{t}{|z_0|}\Big/ k_0 = \delta < \frac{1}{2}$$

が成り立つようにとる．そうすると，$(n-1) \geqq k_0$のとき

$$\left|\alpha_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right| \leqq \frac{|\alpha_n z_0{}^n|}{(n-1)!|z_0|}\left|\frac{t}{z_0}\right|^{n-1}$$

$$\leqq M \prod_{k=1}^{k_0-1}\left(\frac{1}{k}\frac{t}{|z_0|}\right)\frac{1}{|z_0|}\times\delta^{n-k_0} \leqq M \prod_{k=1}^{k_0-1}\left(\frac{1}{k}\frac{t}{|z_0|}\right)\frac{t}{|z_0|}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}$$

を得る．最右辺の和は収束等比級数だから，(17)における（　）内のtの冪級数は，すべての$t \geqq 0$で収束するから，（　）は$C[0,\infty)$の函数を定義する．▎

上の定理13の応用例として

定理14　αを正の実数とすると

$$\frac{I}{\sqrt{s^2+\alpha^2}} = \{J_0(\alpha t)\} \tag{19}$$

証明　$\dfrac{I}{s^2+\alpha^2} = \dfrac{h^2}{h^2(s^2+\alpha^2)} = \dfrac{h^2}{I+(\alpha h)^2}$ であるから

$$\frac{I}{\sqrt{s^2+\alpha^2}} = \sqrt{\frac{I}{s^2+\alpha^2}} = \sqrt{\frac{h^2}{I+(\alpha h)^2}} = \frac{h}{\sqrt{I+(\alpha h)^2}} = h(I+(\alpha h)^2)^{-1/2}$$

ここに

$$\frac{I}{\sqrt{I+(\alpha h)^2}} = (I+(\alpha h)^2)^{-1/2}$$

であることは，$-1<\alpha z<1$で収束する2項級数展開について

$$\frac{1}{(1+(\alpha z)^2)^{1/2}} = (1+(\alpha z)^2)^{-1/2}$$

が成り立つからわかる．

さて，§14の(1)-(2)，§17の(15)-(17)，§15の(8)によって

$$h(I+(\alpha h)^2)^{-1/2} = h\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(\alpha h)^{2k}$$

$$= h\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\alpha^{2k}h^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \alpha^{2k} h^{2k+1}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \alpha^{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha t)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \right\} = \{J_0(\alpha t)\} \qquad \blacksquare$$

例1　$\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$ は $|z|<1$ では収束する．そして

$$\frac{I}{s-\alpha} = \frac{h}{1-\alpha h} = h+\alpha h^2+\alpha^2 h^3+\cdots$$

$$= \left\{ 1+\frac{\alpha t}{1!}+\frac{\alpha^2 t^2}{2!}+\cdots \right\} = \{e^{\alpha t}\}$$

これは§6で既に知っている(16)と一致する．

例2　$\sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots$ はすべての z で収束する．そして

(20)
$$\sin\frac{I}{s} = \sin h = h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots$$

$$= \left\{ 1-\frac{t^2}{3!2!}+\frac{t^4}{5!4!}-\cdots \right\}$$

例3　$(s-\alpha)^{-\lambda}=\left\{\dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}$ は§13の(12)による．一方，本節の方法によると，§13の(15)により

$$(s-\alpha)^{-\lambda} = (s(I-\alpha h))^{-\lambda}$$

$$= h^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{\nu} (-\alpha)^{\nu} h^{\nu} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{\nu} (-\alpha)^{\nu} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\nu)\alpha^{\nu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)} \left\{ \int_0^t (t-u)^{\lambda-1} u^{\nu-1} du \right\}$$

この積分は，度々やったように，$t-u=tw$ とおいて

$$\int_0^1 t^{\lambda-1} w^{\lambda-1} t^{\nu-1} (1-w)^{\nu-1} t dw = t^{\lambda-1} t^{\nu} B(\lambda, \nu)$$

となるから，

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda+\nu)} \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \frac{(\alpha t)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \right\} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{\alpha t} \right\}$$

このようにして，§13の方法と§17の方法が同じ結果を与えるのである．

例4　αを正の実数として

(21) $$(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^n = \left\{\frac{nt^\alpha}{t}J_n(\alpha t)\right\} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

証明　あとから示すように，$-1<z<1$のとき

(22) $$(\sqrt{1+z}-1)^n = n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k-1)!}{2^{n+2k}k!(n+k)!}z^{n+k}$$

が成り立つ．ゆえに，$J_n(t)$の定義(§15の(8))により，

$$\begin{aligned}(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^n &= s^n(\sqrt{1+\alpha^2h^2}-1)^n\\ &= n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k-1)!}{2^{n+2k}k!(n+k)!}\alpha^{2(n+k)}h^{n+2k}\\ &= \left\{n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2(n+k)}t^{n+2k-1}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}\right\}\\ &= \left\{\frac{n\alpha^n}{t}J_n(\alpha t)\right\}\end{aligned}$$

ゆえに特に

(21)′ $$(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^n = \left\{n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2(n+k)}t^{n+2k-1}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}\right\}.$$

最後に(22)の証明

(23) $$f_n(z) = (\sqrt{1+z}-1)^n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと，容易に

(24) $$\begin{cases} f_{n+1}'(z) = \dfrac{(n+1)(\sqrt{1+z}-1)^n}{2\sqrt{1+z}},\\[2ex] (z^{-n/2}f_n(z))' = \dfrac{n}{2}z^{-n/2-1}\dfrac{(\sqrt{1+z}-1)^n}{\sqrt{1+z}}\end{cases}$$

が得られる．よって

$$f_{n+1}'(z) = \frac{n+1}{n}z^{n/2+1}(z^{-n/2}f_n(z))'$$

また(23)から$f_n(0)=0$であるから

(25) $$f_{n+1}(z) = \frac{n+1}{n}\int_0^z z^{n/2+1}(z^{-n/2}f_n(z))'dz$$

そして項2級数展開(§14の(1))によって

$$f_1(z)=\sqrt{1+z}-1=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu)!}{2^{1+2\nu}\nu!(1+\nu)!}z^{1+\nu}$$

が成り立つので，(25)を用いて $f_1(z)$ から順次に $f_n(z)$ の展開(22)が求められる. ∎

系

$$\frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}=\{\alpha^n J_n(\alpha t)\}\qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{26}$$

証明　(21)′において n を $(n+1)$ でおきかえ，α に関して微分し[1]，$(n+1)\alpha$ で割ればよい.

例6　$\alpha>0$ に対して

$$e^{-\alpha/s}=s\{J_0(2\sqrt{\alpha t}\,)\} \tag{27}$$

証明　§15の(8)によって

$$e^{-\alpha h}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\alpha h)^k}{k!}=s\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^k h^{k+1}}{k!}$$

$$=s\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^k t^k}{(k!)^2}\right\}=s\{J_0(2\sqrt{\alpha t}\,)\}$$ ∎

例7　$\alpha>0$ に対して

$$\frac{e^{-\alpha/s}}{\sqrt{s}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\lambda t}\right\} \tag{28}$$

証明

$$h^{1/2}e^{-\alpha h}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^k h^{k+1/2}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^k t^{k-1/2}}{k!\Gamma(k+1/2)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^k t^{k-1/2}}{k(k-1)\cdots 1(k-1/2)(k-3/2)\cdots(1/2)\Gamma(1/2)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}\alpha^k t^{k-1/2}}{(2k)(2k-1)\cdots 1\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2\sqrt{\alpha t}\,)^{2k}}{(2k)!}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\lambda t}\right\}$$ ∎

---

1)　パラメーター α に関しての微分については§21にくわしく述べる.

演　習　問　題

1. $\dfrac{I}{s^2}e^{-\alpha/s}=\{\sqrt{t/\alpha}\,J_1(2\sqrt{\alpha t}\,)\}$

2. $\dfrac{I}{\sqrt{s}}e^{\alpha/s}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cosh(2\sqrt{\alpha t}\,)\right\}$

3. $\dfrac{I}{s}e^{-\alpha/s}=J_0\{(2\sqrt{\alpha t}\,)\}$

註　(校正中に)岡本周一君から，$\mathscr{C}_P=\mathscr{C}_H$ であることを知らされた．これは，定理7，定理7′およびその系を用いて証明するよき演習問題であるので読者これを試みられよ．

第II部　推移オペレイター $\exp(-\lambda s)$ と拡散オペレイター $\exp(-\lambda s^{1/2})$ (超函数の類 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$)

第6章　指数函数 $\exp(-\lambda s)$ と指数函数 $\exp(-\lambda s^{1/2})$

§18　推移オペレイター $\exp(-\lambda s)=e^{-\lambda s}$．函数空間 $\mathcal{K}=K[0,\infty)$

まず $\lambda\geqq 0$ に対して定義された

(1)
$$H_\lambda(t)=\begin{cases}0, & 0\leqq t<\lambda\\ 1, & 0\leqq\lambda<t<\infty\end{cases}$$

を **Heaviside の単位函数**(unit function)と呼ぶ[1]．そして $\mathcal{C}$ の函数

(2)
$$h_1(\lambda,t)=\int_0^t H_\lambda(u)du=\begin{cases}0, & 0\leqq t<\lambda\\ t-\lambda, & 0\leqq\lambda\leqq t<\infty\end{cases}$$

から $\mathcal{C}_H$ の元

(3)
$$e^{-\lambda s}=s^2\{h_1(\lambda,t)\}$$

を定義する[2]

命題 11　$f\in\mathcal{C}$ とすると，

(4)
$$e^{-\lambda s}\{f(t)\}=s\left\{\begin{matrix}0, & 0\leqq t<\lambda\\ \displaystyle\int_0^{t-\lambda}f(u)du, & 0\leqq\lambda\leqq t<\infty\end{matrix}\right\}$$

が成り立つ．

証明　(2) と定理 3 とによって

$$s^2\left\{\int_0^t h_1(\lambda,t-u)f(u)du\right\}$$

---

1)　$t=\lambda$ のところでは値 $H_\lambda(t)$ を定めておかない，有限な値なら何でもよい．

2)　$s^2\{h_1(,t)\}$ を $e^{-\lambda s}$ と書く理由は後の §22 で述べる．

$$= s\cdot s\begin{Bmatrix} 0,\ \ 0 \leqq t < \lambda \\ \displaystyle\int_0^{t-\lambda}(t-u-\lambda)f(u)du,\ \ \lambda \leqq t < \infty \end{Bmatrix}$$

$$= s\begin{Bmatrix} 0,\ \ 0 \leqq t < \lambda \\ \displaystyle\int_0^{t-\lambda} f(u)du,\ \ \lambda \leqq t < \infty \end{Bmatrix}$$

である．パラメターを含む函数の積分の微分に関する良く知られた定理で，$\lambda < t$ のとき

$$s\int_0^{t-u}(t-u-\lambda)f(u)du = \frac{d}{dt}\int_0^{t-\lambda}(t-u-\lambda)f(u)du$$

$$-0 = (t-u-\lambda)f(u)|_{u=t-\lambda} + \int_0^{t-\lambda}\frac{d}{dt}(t-u-\lambda)f(u)du$$

となるからである[1)]．

註 1　$h_1(0,t) = \{t\}$ であるから，

(5)　$$e^{-\lambda s}|_{\lambda=0} = s^2\{t\} = s\cdot s\{t\} = s\{1\} = I$$

である．すなわち $e^{-0\cdot s} = I$.

註 2　$\lambda > 0$，$\mu > 0$ とすると

(6)　$$e^{-\lambda s}e^{-\mu s} = e^{-(\lambda+\mu)s}$$

証明

$$s^2\{h_1(\lambda, t)\}s^2\{h_1(\mu, t)\} = s^2\{h_1(\lambda+\mu, t)\}$$

をいえばよい．ところが (2) によって (4) の証明のときのごとく

$$s^2\left\{\int_0^t h_1(\lambda, t-u)h_1(\mu, u)du\right\}$$

$$= s^2\left\{\int_\mu^{t-\lambda}(t-u-\lambda)(u-\mu)du\right\}$$

---

1)　$\begin{Bmatrix} 0, 0 \leqq t < \lambda \\ \displaystyle\int_0^{t-\lambda} f(u)du, 0 \leqq \lambda < t < \infty \end{Bmatrix}$ は $\begin{Bmatrix} 0, 0 \leqq t < \lambda \\ \displaystyle\int_0^{t-\lambda} f(u)du, 0 \leqq \lambda \leqq t < \infty \end{Bmatrix}$ と考えても不都合は生じない．

$$= s\left\{\int_{\mu}^{t-\lambda}(u-\mu)du\right\} = (t-\lambda-\mu) \qquad (t>\lambda+\mu \text{ のとき})^{1)}$$

を得るのである.

註3　微分オペレイターとしての s の作用から示唆されて, (4)により $e^{-\lambda s}$ は図の示すごとく, 与えられた函数 f のグラフを, 長さ λ だけ t 軸の正の方向に



平行移動させるという**推移**(shift)**オペレイター**または**移動オペレイター**として具体的に表現できるのである. すなわち $\mathscr{C}_H$ の元である $e^{-\lambda t}\{f(t)\}$ を, $t=\lambda$ で不連続であり得る函数

(4)′
$$\begin{cases} 0, & 0 \leqq t < \lambda \\ f(t-\lambda), & 0 \leqq \lambda < t \end{cases}$$

で表現しようというのである. こういう表現を導入する為には, $\mathscr{C}$ の函数に局限しないで, たとえば, Mikusiński がしたように函数の類 $\mathscr{K}$ を考えることにするとよい. すなわち

函数の類 $\mathscr{K}$　$0\leqq t<\infty$ で定義された, 複素数値の函数 $\{f(t)\}$ が函数の類 $\mathscr{K}$ $=K[0,\infty)$——または[0, ∞)を略して $\mathscr{K}$——に属するとは, 次の二つの条件を満たすこととする:

(i)　すべての有限区間 $\subseteqq[0,\infty)$ に対して, $\{f(t)\}$ はこの区間に有限個の不連続点しかもたない.

(ii)　すべての $t>0$ に対して $\int_0^t |f(u)|du$ は有限値をとる.

そして $f\in\mathscr{K}$ ならば, $f\in\mathscr{C}$ のときと同じく合成積

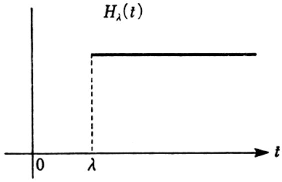
$$hf = \{1\}\{f(t)\} = \left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

1)　そうして $t<\lambda+\mu$ のときに, $=0$ となる.
$h_1(\lambda, t-u)h_1(\mu, u)>0$ となるのは, $0\leqq\lambda<t-u$, $0\leqq\mu<u$ のときに限るからである.

が定義されかつ $hf\in\mathscr{C}$ となる．のみならず $f,g\in\mathscr{K}$ のときにもその合成積

$$(fg)(t)=\int_0^t f(t-u)g(u)du$$

は定義されて $fg\in\mathscr{K}$ であり，$\mathscr{K}$ は $\mathscr{C}$ の場合と同じように乗法 fg に関して可換な(合成積)環を作る．ただし $\mathscr{K}$ の函数は Heaviside の単位函数 $\{H_\lambda(t)\}$ のように不連続点 $t=\lambda$ では，そのグラフが図のように飛躍していることもある



ので，一般に不連続点における函数値は定義されていなくてもよい．だから $\mathscr{K}$ に属する二つの函数 f と g とは，f と g とが共に連続であるような各点での値がすべて互に相等しいときに，f と g とは $\mathscr{K}$ の函数として相等しいと考えることにする[1)]．

したがってまた，$\mathscr{K}$ の函数 f と g との和は，f と g とが共に連続であるような点 t での値に注目して

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$$

によって $\mathscr{K}$ の函数 $f+g$ を定義するのである．

このように考えて，$\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}_H$ を作ったように，$\mathscr{K}$ から超函数の類 $\mathscr{K}_H=\left\{\dfrac{f}{h^n};f\in\mathscr{K},\ n=1,2,\cdots\right\}$ を作ることも出来るのである．

この $\mathscr{K}$ の元 f に対しても

$$hf=\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

であり，さらにこのような函数 $\{g(t)\}=\left\{\int_0^t f(u)du\right\}\in\mathscr{C}$ に対しては

$$sg=g'+sg(0)=\{f(t)\}$$

が成り立つのである．右辺の $\{f(t)\}$ は，$\mathscr{K}$ の函数であるから f の連続であるような点 t でのみその値が確定しているのである．

1) ゆえに合成積環 $\mathscr{K}$ の零元は，その連続点 t ではつねに0になるような $\mathscr{K}$ の函数のことである．

例　§18の(2)における $\{h_1(\lambda,t)\}$ に対しては

$$s\{h_1(\lambda,t)\} = \begin{cases} 0, & 0 \leqq t < \lambda \\ 1, & \lambda < t < \infty \end{cases} = \{H_\lambda(t)\}$$

となるわけである．{　} と $\{H_\lambda(t)\}$ とは，双方が連続であるような t においては値が一致しているので $\mathscr{K}$ の函数として相等しいのである．

註　$\mathscr{K}$ に属する函数 $f=\{f(t)\}$ は，これを $\dfrac{hf}{h}$ という超函数 $\in \mathscr{C}_H$ と**同定**(identify)することにすると，$\mathscr{K}$ という函数の類に属する函数 $\{f(t)\}$ は，超函数 $\dfrac{hf}{h} \in \mathscr{C}_H$ の具体的表現であると考えることが出来る．

$\mathscr{K}$ の一つの応用　力学において**撃力**(瞬間的に働く大きな力，impulsive force)と称せられるものの超函数としての表現について述べる．

F を正数とする．正数 ε に対して，時刻 $t=0$ から $t=\varepsilon$ までの間に $\dfrac{F}{\varepsilon}$ の強さの外力が，単位質量の質点に作用しつづけるときには，この時間間隔の間にこの質点に

$$\frac{F}{\varepsilon}\times\varepsilon = F = \int_0^\varepsilon \frac{F}{\varepsilon}du$$

の大きさの**力積**(impulse)が働くという．力積は，$\mathscr{K}$ に属する函数

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{F}{\varepsilon}, & 0 \leqq t \leqq \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t \end{cases}$$

と $h \in \mathscr{C}$ との合成積 $h*f_\varepsilon$ と考えられる．撃力は超函数 f_ε の $\varepsilon \downarrow 0$ における極限と考えられるが，そうすると

$$\text{撃力} = [F] = [F]I = s\{F\}$$

と表現される．すなわち $g \in \mathscr{C}$ に対して g と f_ε の合成積について

$$g*f_\varepsilon = \left\{\int_0^\varepsilon g(t-u)\frac{F}{\varepsilon}du\right\} = \left\{\frac{F}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t g(\tau)d\tau\right\} \qquad (0<\varepsilon<t)$$

であるから，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき $g*f_\varepsilon$ は $\{Fg(t)\}$ (F 倍の g) に近づく．すなわち，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき超函数 f_ε は超函数 $[F]I$ に近づくのである．物理学者は，この I を δ(デルタ)函数と呼んでいる．

撃力の例　$y''+2ay'+b^2y=f$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$ における外力 f を超函数

$[F]I$ であるとすると，$b^2=a^2+\omega^2$ とおいて(§10の例6参照)

$$s^2y+2asy+b^2y = [F]I$$

これを y について解いて

$$\begin{aligned} y &= \frac{[F]I}{s^2+2as+b^2} = \frac{[F]I}{(s+a-i\omega)(s+a+i\omega)} \\ &= \frac{[F]}{2i\omega}\left(\frac{I}{s+a-i\omega}-\frac{I}{s+a+i\omega}\right) \\ &= \left\{\frac{F}{\omega}\left(e^{-at}\frac{e^{+i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)\right\} \\ &= \left\{\frac{F}{\omega}e^{-at}\sin\omega t\right\} \end{aligned}$$

§19　Titchmarsh[1]の定理の証明

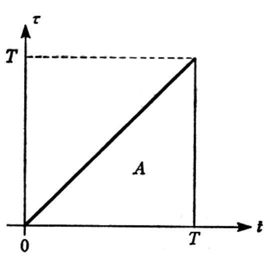
命題 12[2]　$z=\{z(t)\}\in\mathscr{C}=C[0,\infty)$ に対して，$0\leqq t\leqq T$ なるすべての t で

$$\int_0^t z(t-\tau)z(\tau)d\tau = 0$$

であれば，$0\leqq t\leqq \dfrac{T}{2}$ なるすべての t で $z(t)=0$ でなければならない．ここに T は任意の正数とする．

証明　すべての自然数 n に対して

$$I_n = \int_0^T e^{n(T-t)}\left(\int_0^t z(t-\tau)z(\tau)d\tau\right)dt = 0$$



1)　E. C. Titchmarsh (1896-　)
2)　Mikusiński 演算子法，上巻，p. 14. または Mikusiński : The Bochner Integral, Academic Press (1978), p. 204-.

となる．この反復積分は図の三角形 A における2重積分で表わされる．故に

$$I_n = \iint_A e^{n(T-t)} z(t-\tau)z(\tau)dtd\tau = 0$$

ここで変数変換 $(t,\tau)\to(u,v)$:

$$t = T-u-v,\ \ \tau = \frac{1}{2}T-v$$

を施すと，この変換の Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(t,\tau)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから

$$I_n = \iint_B e^{n(u+v)} z\left(\frac{T}{2}-u\right) z\left(\frac{T}{2}-v\right) dudv = 0$$

ここに B は

$$0 \leqq u+v,\ \ 2u \leqq T,\ \ 2v \leqq T$$

で与えられる三角形である．図のように C を

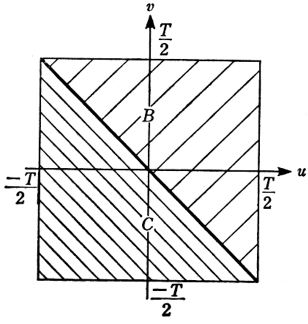
$$-T \leqq 2u,\ \ -T \leqq 2v,\ \ u+v \leqq 0$$

で与えられる三角形とすると，

$$\iint_{B\cup C} = \iint_B + \iint_C$$

であり $B\cup C$ は

$$-\frac{T}{2} \leqq u \leqq \frac{T}{2},\ -\frac{T}{2} \leqq v \leqq \frac{T}{2}$$



で与えられる正4角形である.

そして $\iint_B = I_n = 0$ であるから

$$\iint_{B\cup C} e^{nu}z\left(\frac{T}{2}-u\right)\cdot e^{nv}z\left(\frac{T}{2}-v\right)dudv$$
$$=\iint_C e^{n(u+v)}z\left(\frac{T}{2}-u\right)z\left(\frac{T}{2}-v\right)dudv$$

となる. ところが $n>0$ であるから, C では $e^{n(u+v)}\leqq 1$ となるので

$$\left|\iint_{B\cup C}\right| = \left|\int_{-T/2}^{T/2} e^{nu}z\left(\frac{T}{2}-u\right)du\int_{-T/2}^{T/2} e^{nv}z\left(\frac{T}{2}-v\right)dv\right|$$
$$=\left|\iint_C\right| \leqq \iint_C\left|z\left(\frac{T}{2}-u\right)\cdot z\left(\frac{T}{2}-v\right)\right|dudv$$
$$=M^2,$$

ここに, M^2 は函数 $z(t)$ の絶対値の $t\in\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ における最大値の2乗に, C の面積 $\frac{1}{2}T^2$ を乗じたものである.

ゆえに

$$\left|\int_{-T/2}^{T/2} e^{nu}z\left(\frac{T}{2}-u\right)du\right| \leqq M$$

したがって

$$\left|\int_0^{T/2} e^{nu}z\left(\frac{T}{2}-u\right)du\right| \leqq M+\int_{-T/2}^{0}\left|z\left(\frac{T}{2}-u\right)\right|du$$

が成り立つ. この右辺を N とおくと

$$\left|\int_0^{T/2} e^{nu}z\left(\frac{T}{2}-u\right)du\right| \leqq N \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{7}$$

でなければならない.

ゆえに次の命題13によって, $z\left(\frac{T}{2}-u\right)$ は, $0\leqq u\leqq\frac{T}{2}$ であるすべての u で0になる. すなわち $z(t)$ は区間 $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ のすべての点 t で0になる.

命題13　(**Lerch の定理**)　複素数値函数 $w(t)$ が $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ で連続であり, かつ定数 N に対して

$$\left|\int_0^{T/2} e^{nt}w(t)dt\right| \leqq N \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{8}$$

が成り立つならば，$w(t)$ は $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ のすべての t で 0 になる．

証明　k と x とを自然数とする．$w\left(\dfrac{T}{2}-u\right)=g(u)$ とおいて (8) から

$$\left|\int_0^{T/2} e^{kx(T/2-t)}g(t)dt\right| = \left|\int_0^{T/2} e^{kx(T/2-u)}w\left(\frac{T}{2}-u\right)du\right|$$

$$= \left|\int_0^{T/2} e^{kxt}w(t)dt\right| \leqq N \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

を得る．ゆえに

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{-kx(T/2-t)}\int_0^{T/2} e^{kx(T/2-u)}g(u)du\right|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{-kx(T/2-t)}N = N[\exp(e^{-x(T/2-t)})-1]$$

この右辺は，$x\to+\infty$ のとき各 $t\in\left[0, \dfrac{T}{2}\right)$ で 0 に収束する．ゆえに

$$\lim_{x\to\infty}\left|\int_0^{T/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kx(t-u)}g(u)du\right| = 0 \qquad \left(0\leqq t<\frac{T}{2}\right)$$

ところが(上に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}=0$ から導かれた)この積分は

$$\int_0^{T/2}[1-\exp(-e^{x(t-u)}]g(u)du$$

で，被積分函数が $0\leqq t, u\leqq\dfrac{T}{2}$ で有界であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ と $\displaystyle\int_0^{T/2}du$ との順序を交換してもよい[1]．ゆえに，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$0\leqq t\leqq\dfrac{T}{2}-\varepsilon$ で

$$0 = \lim_{x\to\infty}\int_0^{T/2}[1-\exp(-e^{x(t-u)})]g(u)du$$

$$= \int_0^{T/2}\lim_{x\to\infty}[1-\exp(-e^{x(t-u)})]g(u)du$$

$$= \int_0^{T/2}\begin{cases}1, & t>u\\ 0, & t<u\end{cases}g(u)du = \int_0^t g(u)du$$

すなわち

$$\int_0^t g(u)du = 0 \qquad \left(0\leqq t\leqq\frac{T}{2}-\varepsilon\right) \tag{9}$$

1)　積分はいわゆる **Riemann** 積分であるが，これを **Lebegue** 積分と考えるならば，上の順序交換の正当性は保証されている(たとえば筆者：測度と積分，岩波基礎数学講座を見よ)．

を得た. $g(u)=w\left(\frac{T}{2}-u\right)$ は u の連続函数であったから, (9) を微分して $g(t)=0$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{T}{2}-\varepsilon\right)$ $\varepsilon>0$ は任意であったから $g(t)=0\left(0\leqq t\leqq\frac{T}{2}\right)$ となり, 結局

$$w(t)=0 \qquad \left(0\leqq t\leqq\frac{T}{2} \text{ のすべての } t \text{ で}\right)$$ ▌

命題 12 を用いて

定理 14 (Titchmarsh の定理)　f, g ともに $\mathscr{C}=C[0,\infty)$ の函数で

$$\int_0^t f(t-u)g(u)=0,\ \ 0\leqq t<\infty \tag{10}$$

ならば

$$f(t)=0\,(0\leqq t<\infty) \quad \text{または} \quad g(t)=0\,(0\leqq t<\infty) \tag{11}$$

である.

証明[1] (10) から, $0\leqq t<\infty$ において

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t (t-u)f(t-u)g(u)du+\int_0^t f(t-u)ug(u)du \\ \displaystyle =t\int_0^t f(t-u)g(u)du=0 \end{cases} \tag{12}$$

が成り立つ.

ゆえに, 次の記号

$$f_1(t)=tf(t),\ \ g_1(t)=tg(t) \qquad (0\leqq t<\infty)$$

を導入すれば, (12) は $f_1{*}g=f_1g,\ f{*}g_1=fg_1$ として

$$f_1g+fg_1=0$$

と書ける. ゆえに

$$fg_1(f_1g+fg_1)=0$$

となるから, 定理 1 の合成積の結合律, 可換律および分配律によって

$$fg\cdot f_1g_1+(fg_1)^2=0$$

ところが, 仮定 (10) すなわち $fg=0$ があるので

$$(fg_1)^2=0$$

1)　C. Ryll-Nardzewski によるという.

すなわち，命題12において $T\to+\infty$ として

(13)
$$\int_0^t f(t-u)ug(u)du=0 \qquad (0\leqq t<\infty)$$

を得る．

(10)から(13)が導かれたのだから，(13)から

$$\int_0^t f(t-u)u^2g(u)du=0 \qquad (0\leqq t<\infty)$$

なお一般に，

(13)′
$$\int_0^t f(t-u)u^ng(u)du=0 \qquad (0\leqq t<\infty;\ n=1,2,\cdots)$$

が成り立つ．ゆえに

(14)
$$f(t-u)g(u)=k_t(u) \qquad (0\leqq u\leqq t<\infty)$$

とおいて

$$\int_0^t u^nk_t(u)du=0 \qquad (0\leqq u\leqq t<\infty)$$

したがって，u のどんな多項式 $p(u)$ に対しても

(15)
$$\int_0^t p(u)k_t(u)du=0$$

が成り立つ．

ところが，閉区間 $[0,t]$ で $k_t(u)$ の共役複素数値函数 $\overline{k_t(u)}$ に対して，$[0,t]$ で連続な複素数値函数に関する **Weierstrass の多項式近似定理**[1]を適用すると：

任意の $\varepsilon>0$ をとると u の多項式 $p_\varepsilon(u)$ を

(16)
$$\max_{u\in[0,t]}|\overline{k_t(u)}-p_\varepsilon(u)|\leqq\varepsilon$$

が満足されるように選べる．

ゆえに $M=\max\limits_{u\in[0,t]}|k_t(u)|$

とおくと，(15)と(16)とによって

$$\int_0^t k_t(u)\overline{k_t(u)}du=\int_0^t|k_t(u)|^2du$$

---

1)　証明は本章の最後に補遺として述べる．K. ワイエルシュトラス(1815-1897)．

$$
\begin{aligned}
&= \left|\int_0^t |k_t(u)|^2 du - \int_0^t k_t(u) p_\varepsilon(u) du\right| \\
&\leqq \left|\int_0^t k_t(u)(\overline{k_t(u)} - p_\varepsilon(u)) du\right| \\
&\leqq \left|\int_0^t |k_t(u)| \cdot |\overline{k_t(u)} - p_\varepsilon(u)| du\right. \\
&\leqq M \cdot \varepsilon \cdot t
\end{aligned}
$$

を得る．$\varepsilon>0$ は任意であったから，$\varepsilon\to 0$ として $\int_0^t |k_t(u)|^2 du=0$ となる．$k_t(u)$ は u の連続函数であるから，$k_t(u)=0\,(0\leqq u\leqq t)$ がいえた．

ゆえに(14)から

$$f(t-u)g(u) = 0 \qquad (0\leqq u\leqq t<\infty)$$

が成り立つことがわかった．若し $g(u_0)\neq 0$ となるような $u_0\geqq 0$ が存在すれば，上式から $f(t-u_0)=0\,(0\leqq u_0\leqq t<\infty)$，すなわち $f(t)=0\,(0\leqq t<\infty)$ を得る．

結局，$g(t)=0\,(0\leqq t<\infty)$ であるか $f(t)=0\,(0\leqq t<\infty)$ であるかの少なくとも片方が成り立たねばならない[1]．▎

§20　超函数の類 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の導入

超函数の類 $\mathcal{C}_H$ を，§3 の命題 3 に基づいて導入したと同じようにして，前§の定理 14 に基づいて超函数の類 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ を導入する．すなわち

f, g ともに $\in \mathcal{C}=C[0,\infty)$ であり，かつ $g\neq 0$ ($g=\{g(t)\}$ の函数 $g(t)$ が恒等的に 0 でない) ときに，形式的な分数 $\dfrac{f}{g}=f/g$ を考える．

命題 14　二つの分数 $\dfrac{f}{g}$ と $\dfrac{f_1}{g_1}$ との間の関係 $\approx$ すなわち

(17)　$$\frac{f}{g}\approx\frac{f_1}{g_1} \quad \text{を} \quad fg_1 = f_1 g \quad \text{で規定する}$$

と，$\approx$ は**同値律** (i), (ii), (iii) を満足する：

(i)　$$\frac{f}{g}\approx\frac{f}{g},$$

1)　(13)′ から f=0 または g=0 の少なくとも片方が成り立つことを，Mikusiński の本では上の命題 13(Lerch の定理)に帰着させて導いている．

(ii)　$$\frac{f}{g} \approx \frac{f_1}{g_1} \quad ならば \quad \frac{f_1}{g_1} \approx \frac{f}{g},$$

(iii)　$$\frac{f}{g} \approx \frac{f_1}{g_1}, \frac{f_1}{g_1} \approx \frac{f_2}{g_2} \quad ならば \quad \frac{f}{g} \approx \frac{f_2}{g_2}.$$

証明　(iii)だけ証明する．仮定から

$$fg_1 = f_1 g \quad かつ \quad f_1 g_2 = f_2 g_1$$

始めの式の両辺に g_2 を，あとの式の両辺に g を乗じて

$$fg_1 g_2 = f_1 g g_2, \quad f_1 g_2 g = f_2 g_1 g$$

ゆえに，合成積の乗法が可換律と結合律に従うことを用いて

$$fg_1 g_2 = f_2 g_1 g$$

合成積乗法が分配律に従うから

$$(fg_2 - f_2 g)g_1 = 0$$

ところが分母に出て来る g_1 は 0 でないから，定理 14 によって

$$fg_2 = f_2 g \quad すなわち \quad \frac{f}{g} \approx \frac{f_2}{g_2}$$ ▎

ゆえに

(17)′　$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \quad を \quad fg_1 = f_1 g \quad で規定する$$

ことが許される．そうして得られた**分数** $\dfrac{f}{g}$ の全体を $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ で表わすと，$\mathcal{C}/\mathcal{C}$ は

(18)　$$加法\ \frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} = \frac{fg' + f'g}{gg'},$$

(19)　$$乗法\ \frac{f}{g}\frac{f'}{g'} = \frac{ff'}{gg'}$$

によって乗法の可換な環を作る[1]．

系　$\dfrac{f}{g} \neq 0$ ならば，$f \neq 0$ であるから，分数 $\dfrac{g}{f}$ が定義されるが，$\dfrac{f}{g}\dfrac{g}{f} = \dfrac{fg}{gf} = I$ であるから $\dfrac{g}{f}$ は乗法の意味で $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ における $\dfrac{f}{g}$ の**逆元**$\left(\dfrac{f}{g}\ は\ \dfrac{g}{f}\ の\textbf{逆元}\right)$になっている．

---

1)　(18)や(19)における gg' は，Titchmarsh の定理によって 0 にならない．ゆえに(18)，(19)の右辺がいずれも分数として確定するのである．

註　$\mathcal{C}_H$ の元 $\dfrac{f}{h^n}$ や $\mathcal{C}_P$ の元 $\dfrac{f}{p}$ などはすべて $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の元と考えられるので，$\mathcal{C}_H$ や $\mathcal{C}_P$ はすべて環 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の部分環になっている．また $\mathcal{C}_H$ の或る種の元 $hf/h(f\in\mathcal{K})$ のこの具体的な表現も $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の元と等置して考えられる．

このようにして，$\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の元をオペレイターまたは超函数と考えることによって，第1篇におけるオペレイターまたは超函数

$$h, s, [\alpha] = s\{\alpha\}, s \text{ の有理式など}$$

の外にひろがる，超函数の概念の著しい一般化がなされることになった．これらが第2部，第3部の内容となるのである．

§21　超函数値函数 $f(\lambda)$ の定義．$f(\lambda)$ の λ に関する超函数的微分 $f'(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}f(\lambda)$ の定義

オペレイター値函数または超函数値函数．実数パラメター λ の値を λ_0 と定めると，それに対してオペレイター（＝超函数）$f(\lambda_0)$ が確定するようになっているときに，$f(\lambda)$ を λ に依存するオペレイター値函数または超函数値函数と呼ぶことにする．推移オペレイター

$$s^2\{h_1(\lambda,t)\}\in\mathcal{C}_H \qquad (0\leqq\lambda)$$

がその例である．ここに $\{h_1(0,t)\}=\{t\}$ とする．

オペレイター値函数 $f(\lambda)$ の λ に関する超函数的微分 $f'(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}f(\lambda)$ を次のように定義する．

適当に $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の元 $\dfrac{b}{a}\neq 0$[1] をとると

$$\frac{b}{a}f(\lambda) = \{\hat{f}(\lambda,t)\}$$

となるような複素数値函数 $\{\hat{f}(\lambda,t)\}$ で，

$$\mathcal{D} = \{\{\lambda,t\}\,;\ \lambda_1<\lambda<\lambda_2,\ t\geqq 0\}$$

において $\hat{f}(\lambda,t)$ および $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda,t)$ が連続になるように $\{\hat{f}(\lambda,t)\}$ が存在するときに，$\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ における $f(\lambda)$ の**超函数的微分** $f'(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}f(\lambda)$ が存在するといい，

---

1)　したがって $a\in\mathcal{C}$ も $b\in\mathcal{C}$ もともに $a\neq 0, b\neq 0$ を満足するとする．

その微分を

$$f'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}f(\lambda)=\frac{a}{b}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda,t)\right\} \tag{20}$$

によって与える．

註　上の定義が**合理的**(**無矛盾的**)であることをいう必要がある．すなわち上の $\hat{f},a,b$ の代りに $\hat{\hat{f}},c,d$ に対して，$\frac{d}{c}f(\lambda)=\{\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\}$ および $\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\right\}$ が双方とも $\mathscr{D}$ において連続であったとする$\left(勿論\ \frac{d}{c}\neq 0\right)$と，$\mathscr{D}$ において

$$\frac{a}{b}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}((\lambda,t)\right\}=\frac{c}{d}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\right\} \tag{21}$$

が成り立つことを証明しなければならない．その**証明**を以下に与える．

$$\frac{a}{b}\{\hat{f}(\lambda,t)\}=\frac{c}{d}\{\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\}=f(\lambda)$$

の各辺に $bd\in\mathscr{C}$ を乗じて

$$ad\{\hat{f}(\lambda,t)\}=bc\{\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\}=bdf(\lambda)$$

すなわち

$$\int_0^t ad(t-u)\hat{f}(\lambda,u)du=\int_0^t bc(t-u)\hat{\hat{f}}(\lambda,u)du$$

両辺を λ で偏微分して

$$\int_0^t ad(t-u)\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda,u)du=\int_0^t bc(t-u)\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\hat{f}}(\lambda,u)du$$

すなわち

$$ad\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda,t)\right\}=bc\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\right\}$$

を得る．両辺に $\frac{I}{bd}$ を乗じて(21)が証明された．

上の定義の応用として

命題 15　$\lambda>0$ ならば推移オペレイター $f(\lambda)=s^2\{h_1(\lambda,t)\}$ に対して

$$f'(\lambda)=-sf(\lambda),\quad f(0)=I. \tag{22}$$

証明　$h^3f(\lambda)=h\{h_1(\lambda,t)\}$

$$=h\begin{Bmatrix}0, & 0\leqq t<\lambda\\ t-\lambda, & 0<\lambda\leqq t\end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0, & 0 \leqq t < \lambda \\ (t-\lambda)^2/2, & 0 < \lambda \leqq t \end{Bmatrix} = \{\hat{f}((\lambda, t)\}$$

ゆえに

$$f'(\lambda) = \frac{I}{h^3}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda, t)\right\} = s^3\{-h_1(\lambda, t)\}$$

$$= -s\cdot s^2\{h_1(\lambda, t)\} = -sf(\lambda)$$

また

$$f(0) = s^2\{h_1(0, t)\} = s^2\{t\} = s\{1\} = I$$ ∎

註 上の証明のなかの $\{\hat{f}(\lambda, t)\}$ は,

$$\{\{\lambda, t\};\ 0 \leqq \lambda \leqq t < \infty\}$$

において λ, t の連続函数であるから

$$f(\lambda) = s^3\{\hat{f}(\lambda, t)\}$$

において

$$s^3\{\lim_{\lambda\downarrow 0}\hat{f}(\lambda, t)\} = s^3\{\hat{f}(0, t)\} = s^3\left\{\frac{t^2}{2}\right\} = s^2\{t\} = s\{1\} = I$$

となる. よって超函数的微分と同じ考え方で定義される**超函数的極限**

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} f(\lambda) = s^3\{\lim_{\lambda\downarrow 0}\hat{f}(\lambda, t)\} = s^3\{\hat{f}(0, t)\} = I = f(0)$$

となるので, $f(\lambda)=s^2\{h_1(\lambda, t)\}$ は $\lambda\geqq 0$ において超函数的に連続である. すなわち次の超函数的極限式が成り立つ:

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(\lambda) = f(\lambda_0), \ \lambda_0 > 0 \quad \text{のとき} \\ \lim_{\lambda\downarrow 0} f(\lambda) = f(0) = I \end{cases}$$

なおあとの節で使う超函数的微分についての命題を述べておこう.

命題 16 (i) $f(\lambda)$ が $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ において超函数的微分 $f'(\lambda)$ をもつとき, 0 でない $\frac{q}{p}\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ に対して, $\frac{q}{p}f(\lambda)$ も $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ で超函数的微分 $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{q}{p}f(\lambda)\right)$ をもちかつ

$$\text{(24)} \qquad \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{q}{p}f(\lambda)\right) = \frac{q}{p}\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \frac{q}{p}f'(\lambda)$$ [1]

---

1) $\frac{q}{p}=0$ のときには(24)は成り立つ(0=0 として)と考えられるので, 条件 $\frac{q}{p}\neq 0$ はなくてもよい.

(ii)　$f(\lambda), g(\lambda)$ がともに $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ で超函数的微分をもつとき，$f(\lambda)\pm g(\lambda)$ も $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ で超函数的微分をもちかつ

(25)
$$(f(\lambda)\pm g(\lambda))' = f'(\lambda)\pm g'(\lambda)$$

(iii)　$f(\lambda), g(\lambda)$ が $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_1$ で超函数的微分をもてば，$f(\lambda)g(\lambda)$ も $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ で超函数的微分をもちかつ

(26)
$$[f(\lambda)g(\lambda)]' = f'(\lambda)g(\lambda)+f(\lambda)g'(\lambda)$$

(iv)　$f(\lambda)$ が $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ で超函数的微分 $f'(\lambda)=0$ なる為の必要かつ十分な条件は

(27)　$\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ で $f(\lambda)=$ 一定の超函数 c

証明　**(i)**　$\mathscr{D}$[1] において $f(\lambda)=\dfrac{a}{b}\{\hat{f}(\lambda,t)\}$ とすると，$\mathscr{D}$ において

$$\frac{q}{p}f(\lambda) = \frac{qa}{pb}\{\hat{f}(\lambda,t)\}$$

となり，かつ $\dfrac{qa}{pb}\neq 0$ であることから，$\dfrac{q}{p}f(\lambda)$ は超函数的微分をもち

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{q}{p}f(\lambda)\right) = \frac{qa}{pb}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda,t)\right\}$$
$$= \frac{q}{p}\cdot\frac{a}{b}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda,t)\right\} = \frac{q}{p}\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \frac{q}{p}f'(\lambda)$$

が成り立つ．▌

(ii)　$\mathscr{D}$ において

$$f(\lambda) = \frac{a}{b}\{\hat{f}(\lambda,t)\},\quad g(\lambda) = \frac{c}{d}\{\hat{g}(\lambda,t)\}$$

とすると

$$f(\lambda)+g(\lambda) = \frac{h}{hbd}\{ad\{\hat{f}(\lambda,t)\}+bc\{\hat{g}(\lambda,t)\}\}$$

ad, bc は $\in\mathscr{C}$ に属し $\neq 0$ でない．よって

$$ad\{\hat{f}(\lambda,t)\} = \left\{\int_0^t ad(t-u)\hat{f}(\lambda,u)du\right\} = \{\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\},$$
$$bc\{\hat{g}(\lambda,t)\} = \left\{\int_0^t bc(t-u)\hat{g}(\lambda,u)du\right\} = \{\hat{\hat{g}}(\lambda,t)\}$$

---
1)　$\mathscr{D}=\{\{\lambda,t\};\ \lambda_1<\lambda<\lambda_2,\ \ t\geqq 0\}$

この $\{\hat{\hat{f}}(\lambda,t)\}$, $\{\hat{\hat{g}}(\lambda,t)\}$ は $\mathcal{D}$ において連続な $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\hat{f}}(\lambda,t)$, $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\hat{g}}(\lambda,t)$ をもつ．ゆえに (i) を用い

$$ad\left\{\frac{\partial\hat{f}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}=\left\{\frac{\partial\hat{\hat{f}}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\},\ bc\left\{\frac{\partial\hat{g}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}=\left\{\frac{\partial\hat{\hat{g}}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}$$

よって

$$f(\lambda)+g(\lambda)=\frac{h}{hbd}\{\hat{\hat{f}}(\lambda,t)+\hat{\hat{g}}(\lambda,t)\}$$

は，$\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ で超函数的に λ について微分できて

$$\begin{aligned}\frac{d(f(\lambda)+g(\lambda))}{d\lambda}&=\frac{h}{hbd}\left\{\frac{\partial\hat{\hat{f}}(\lambda,t)}{\partial\lambda}+\frac{\partial\hat{\hat{g}}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}\\&=\frac{h}{hbd}\left(ad\left\{\frac{\partial\hat{f}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}+bc\left\{\frac{\partial\hat{g}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}\right)\\&=\frac{ad}{bd}\left\{\frac{\partial\hat{f}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}+\frac{bc}{bd}\left\{\frac{\partial\hat{g}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}\\&=\frac{a}{b}\left\{\frac{\partial\hat{f}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}+\frac{c}{d}\left\{\frac{\partial\hat{g}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}\\&=\frac{df(\lambda)}{d\lambda}+\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}\end{aligned}$$

∎

(iii)　(ii) と同じく，$\mathcal{D}$ において

$$f(\lambda)=\frac{a}{b}\{\hat{f}(\lambda,t)\},\quad g(\lambda)=\frac{c}{d}\{\hat{g}(\lambda,t)\}$$

とすると

$$f(\lambda)g(\lambda)=\frac{ac}{bd}\left\{\int_0^t\hat{f}(\lambda,t-u)\hat{g}(\lambda,u)du\right\}$$

ところが

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^t\hat{f}(\lambda,t-u)\hat{g}(\lambda,u)du\\&\quad=\int_0^t\frac{\partial\hat{f}(\lambda,t-u)}{\partial\lambda}\hat{g}(\lambda,u)du\\&\quad\quad+\int_0^t\hat{f}(\lambda,t-u)\frac{\partial\hat{g}(\lambda,u)}{\partial\lambda}du\end{aligned}$$

であるから，$f(\lambda)g(\lambda)$ は λ について超函数的に微分できて

$$(f(\lambda)g(\lambda))' = \frac{ac}{bd}\left\{\int_0^t \frac{\partial \hat{f}(\lambda, t-u)}{\partial\lambda}\hat{g}(\lambda,u)du + \int_0^t \hat{f}(\lambda, t-u)\frac{\partial \hat{g}(\lambda,u)}{\partial\lambda}du\right\}$$

$$= \frac{a}{b}\left\{\frac{\partial \hat{f}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right\}\frac{c}{d}\{\hat{g}(\lambda,t)\} + \frac{a}{b}\{\hat{f}(\lambda,t)\}\frac{c}{d}\left\{\frac{\partial \hat{g}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right\}$$

$$= f'(\lambda)g(\lambda)+f(\lambda)g'(\lambda)$$

(iv)　まず $f(\lambda)=$ 超函数 $c\,(\lambda_1<\lambda<\lambda_2)$ とすると

$$c=\frac{b}{a},\quad a\in\mathscr{C} \text{ かつ } b\in\mathscr{C}$$

となる．$b=0$ ならば $f(\lambda)=0$ であるから，$f'(\lambda)=0$ は明らか，よって $b\neq 0$ とすると

$$c=\frac{b}{a}=\frac{h}{ha}\{b(t)\}$$

で $\dfrac{\partial b(t)}{\partial\lambda}\equiv 0$ となるから，$\dfrac{dc}{d\lambda}=\dfrac{h}{ha}\{0\}=0$.

逆に $f'(\lambda)=0$ とすると，0 でない $\dfrac{b}{a}\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$ によって

$$f(\lambda)=\frac{a}{b}\{\hat{f}(\lambda,t)\},\quad \frac{\partial\hat{f}(\lambda,t)}{\partial\lambda}\equiv 0$$

となるから，$\hat{f}(\lambda,t)$ は λ に関係しないで $t\geqq 0$ のみの函数になる．すなわち $\hat{f}(\lambda, t)=\hat{f}(t)\in\mathscr{C}$. ゆえに，すべての $\lambda\,(\lambda_1<\lambda<\lambda_2)$ で恒等的に

$$f(\lambda)=\frac{a\hat{f}}{b}\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$$ ∎

§22　指数函数 $\exp(\lambda s)=e^{\lambda s}$　$(-\infty<\lambda<\infty)$

まず

命題 17　推移オペレイター

$$s^2\{h_1(\lambda, t)\} \qquad (\lambda \geqq 0)^{1)}$$

を $\exp(-\lambda s) = e^{-\lambda s}$ と書くと，$\lambda \geqq 0$ を定めたとき

$$e^{-\lambda s} = \frac{\{h_1(\lambda, t)\}}{h^2} \in \mathcal{C}_H \subseteqq \mathcal{C}/\mathcal{C} \tag{28}$$

であり，$\{h_1(\lambda, t)\} \neq 0$ であるから，環 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ における $e^{-\lambda s}$ の逆オペレイター

$$(e^{-\lambda s})^{-1} = \frac{h^2}{\{h_1(\lambda, t)\}} = \frac{I}{e^{-\lambda s}} \in \mathcal{C}/\mathcal{C} \qquad (\lambda \geqq 0) \tag{29}$$

が存在する．$(e^{-\lambda s})^{-1} = e^{\lambda s}$ と書いて

$$e^{\lambda s} e^{-\lambda s} = I \qquad (\lambda \geqq 0) \tag{30}$$

これを§18の(6)と組合わすと

$$e^{\lambda s} e^{\mu s} = e^{(\lambda+\mu)s} \qquad (-\infty < \lambda, \mu < \infty) \tag{30$'$}$$

を得る．

定理 15 $f(\lambda) = \exp(\lambda s) = e^{\lambda s} \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$ は，すべての λ で $f(\lambda) \neq 0$，かつ超函数的微分

$$\begin{cases} f'(\lambda) = sf(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \\ \text{超函数的極限} \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) = f(0) = I \end{cases} \tag{31}$$

を満足する．逆に(31)を満足する $f(\lambda)$ は $e^{\lambda s}$ に一致する．

註 推移オペレイター $s^2\{h_1(\lambda, t)\}(\lambda \geqq 0)$ を $e^{-\lambda s}$ で表現した理由は上の定理から明らかであろう．

定理 15 の証明 まず $e^{\lambda s}(-\infty < \lambda < \infty)$ が 0 でないことは(30)から明らか．

次に任意の λ に対して $\alpha > \lambda$ なる α をとると(30)′により

$$e^{\lambda s} = e^{\alpha s} e^{-(\alpha-\lambda)s} \tag{32}$$

$(\alpha - \lambda) > 0$ であるから，命題 15 の(22)により

$$\frac{de^{-(\alpha-\lambda)s}}{d(\alpha-\lambda)} = -se^{-(\alpha-\lambda)s}$$

したがって $\alpha > \lambda$ なる λ において

$$\frac{de^{-(\alpha-\lambda)s}}{d\lambda} = \frac{de^{-(\alpha-\lambda)s}}{d(\alpha-\lambda)} \frac{d(\alpha-\lambda)}{d\lambda} = se^{-(\alpha-\lambda)s}$$

---

1) $s^2\{h_1(0, t)\} = s^2\{t\} = s\{1\} = I$

を得る．そして $e^{\alpha s}\neq 0$ であるから，命題 16 の (i) と (32) とによって，超函数的微分

$$\frac{de^{\lambda s}}{d\lambda} = e^{\alpha s}\frac{de^{-(\alpha-\lambda)s}}{d\lambda}$$
$$= e^{\alpha s}se^{-(\alpha-\lambda)s} = se^{\lambda s}$$

が証明された．

また (32) により，$\alpha>\lambda$ ならば §18 の (3) から

$$e^{\lambda s} = e^{\alpha s}e^{-(\alpha-\lambda)s} = e^{\alpha s}s^2\{h_1(\alpha-\lambda, t)\}$$

が成り立つ．そうして

$$\lim_{\lambda\to 0} h_1(\alpha-\lambda, t) = h_1(\alpha, t)$$

であるから，超函数的極限

$$\lim_{\lambda\to 0} e^{\lambda s} = e^{\alpha s}s^2\{\lim_{\lambda\to 0} h_1(\alpha-\lambda, t)\} = e^{\alpha s}s^2\{h_1(\alpha, t)\} = e^{\alpha s}e^{-\alpha s} = I$$

となるので $f(\lambda)=e^{\lambda s}$ に対して (31) のあとの部分が成り立つこともわかった．

最後に $f(\lambda)$ に対して (31) が成り立つときには $f(\lambda)=e^{\lambda s}$ でなければならないことを証明しよう．

まず

$$x(\lambda) = f(\lambda)-e^{\lambda s}$$

とおくと，命題 16 の (25) から

$$x'(\lambda) = f'(\lambda)-(e^{\lambda s})' = sf(\lambda)-se^{\lambda s} = sx(\lambda)$$

を得る．そして $x(0)=f(0)-e^{0\cdot s}=I-I=0$ である．

これから $x(\lambda)=0$ がすべての λ に対して成り立つことを示す．その為に μ を任意に固定した実数として

$$y(\lambda) = x(\lambda)x(2\mu-\lambda)$$

を考える．そうすると命題 16 の (26) によって[1)]

$$y'(\lambda) = x'(\lambda)x(2\mu-\lambda)-x(\lambda)x'(2\mu-\lambda)$$
$$= sx(\lambda)x(2\mu-\lambda)-sx(\lambda)x(2\mu-\lambda) = 0$$

となるので命題 16 の (iv) によって，$y(\lambda)$ は λ に関係しない $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の元 $\dfrac{b}{a}$ に等し

1)　$x'(\lambda), x'(2\mu-\lambda)$ などのダッシュは λ に関する超函数的微分である．

い．ところが $y(0)=x(0)x(2\mu-0)=0$ だから $\dfrac{b}{a}=0$ となって $y(\lambda)=0\,(-\infty<\lambda<\infty)$．すなわち

$$x(\lambda)x(2\mu-\lambda)=0$$

ここで $\mu=\lambda$ とおいてもよいから，$x(\lambda)^2=0$ となる．$x(\lambda)\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ であるから，a および b ともに $\in\mathcal{C}$ かつ $a\neq 0$ として

$$x(\lambda)=\frac{b}{a}\quad\text{したがって}\quad\frac{b^2}{a^2}=0$$

を得た．命題12によって，$a\neq 0$ から $a^2\neq 0$．したがって $b^2=0$ となるので，命題12から $b=0$ となる．

このようにして $x(\lambda)=\dfrac{b}{a}=\dfrac{0}{a}=0$．すなわち $f(\lambda)=e^{\lambda s}$ が証明された．▎

定理15の系　$f(\lambda)=\exp(\lambda s)=e^{\lambda s}\,(-\infty<\lambda<+\infty)$ について，(31)の $f'(\lambda)=sf(\lambda)$ を命題16の(i)により λ について超函数的微分して

$$f''(\lambda)=(f'(\lambda))'=sf'(\lambda)=s^2f(\lambda)$$

なお一般に

$$f^{(n)}(\lambda)=s^nf(\lambda)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

註　$\exp(\lambda s)$ は，超函数的微分の意味で，<u>λ に関して無限微分可能である</u>．

§23　超函数的極限の例．特に $e^{-\lambda s}$ の冪級数など

まず(76頁も参照)

命題18　超函数の列 $\{f_n\in\mathcal{C}/\mathcal{C};\ n=1,2,\cdots\}$ が与えられたとき，適当に選んだ超函数 $\dfrac{b}{a}$ で

$$\frac{b}{a}\in\mathcal{C}/\mathcal{C}\quad\text{かつ}\quad\frac{b}{a}\neq 0$$

であるものに対して

$$(33)\qquad\begin{cases}\dfrac{b}{a}f_n=\{\hat{f}_n(t)\}\in\mathcal{C}\,(n=1,2,\cdots)\text{ かつ }\{\hat{f}(t)\}\in\mathcal{C}\text{ に対し，}\\ \text{すべての有限区間}[0,T]\text{で一様に}\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(t)=\hat{f}(t)\end{cases}$$

が成り立ったとする．このとき，$\dfrac{b}{a}\neq 0$ のとり方に無関係に $\dfrac{a}{b}\{\lim\hat{f}_n(t)\}\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$

が定まるので，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{a}{b}\{\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(t)\} = \frac{a}{b}\{\hat{f}(t)\} \tag{34}$$

と書いて，$\lim_{n\to\infty} f_n$ を $\{f_n; n=1,2,\cdots\}$ の**超函数的極限**と呼ぶ.

証明　$a, b \in \mathscr{C}$ と異なる $a_1, b_1 \in \mathscr{C}$ で $\dfrac{b_1}{a_1} \neq 0$ かつ

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{a_1} f_n = \{\hat{\hat{f}}_n(t)\} \in \mathscr{C} \qquad (n=1,2,\cdots) \text{ となり，しかも} \\ \{\hat{\hat{f}}(t)\} \in \mathscr{C} \text{ に対し，すべての有限区間 } [0,T] \\ \text{で一様に } \lim_{n\to\infty} \hat{\hat{f}}_n(t) = \hat{\hat{f}}(t) \end{cases}$$

が成り立つとせよ.

$$\frac{a}{b}\hat{f}_n = \frac{a_1}{b_1}\hat{\hat{f}}_n$$

により $ab_1\hat{f}_n = a_1b\hat{\hat{f}}_n$ を得るから

$$\int_0^t ab_1(t-u)\hat{f}_n(u)du = \int_0^t a_1b(t-u)\hat{\hat{f}}_n(u)du$$

ここで $n\to\infty$ として

$$\int_0^t ab_1(t-u)\hat{f}((u)du = \int_0^t a_1b(t-u)\hat{\hat{f}}(u)du$$

すなわち $ab_1\hat{f} = a_1b\hat{\hat{f}}$ を得た. $b \neq 0$, $b_1 \neq 0$ であるから，両辺に $\dfrac{I}{bb_1}$ を乗じて

$$\frac{a}{b}\hat{f} = \frac{a_1}{b_1}\hat{\hat{f}}$$

∎

超函数的極限の例

例 1　$f = \{f(t)\} \in \mathscr{C}$ に対し

$$f^1 = f,\ f^2 = ff = f*f \text{(合成積)}$$

一般に

$$f^n = ff^{n-1} = f^{n-1}f \qquad (n=1,2,\cdots)^{1)}$$

と書くとき，$f_n = f^n$ として

1)　$f^0 = I$ としておく.

(35)
$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f^n = 0$$

証明　$T>0$ を定めると，$\sup_{0\leq t\leq T}|f(t)|=M<+\infty$. ゆえに

(36)
$$|f^n(t)| \leqq \frac{M^n t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (0\leqq t\leqq T;\ n=1, 2, \cdots, k)$$

と仮定すると，

$$|f^{k+1}(t)| = \left|\int_0^t f(t-u)f^k(u)du\right| \leqq \int_0^t M\frac{M^k u^{k-1}}{(k-1)!}du = \frac{M^{k+1}t^k}{k!} \qquad (0\leqq t\leqq T)$$

となるので，(36)はすべての自然数 k に対して成り立つ.

ここで $MT/n_0<\dfrac{1}{2}$ となるような n_0 をとると，

$$|f^{k+1}(t)| \leqq \frac{M^{n_0}T^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{MT}{n_0}\right)^{k+1-n_0} \times \frac{1}{T}$$
$$\leqq \frac{M^{n_0}T^{n_0-1}}{n_0!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1-n_0} \qquad (0\leqq t\leqq T)$$

となって，$[0, T]$ において一様に

$$\lim_{n\to\infty}|f^n(t)| = 0$$ ∎

註　この例では，$\dfrac{b}{a}=I$ として証明できた.

例 2　$f_n=\{\sin nt\}$ のときは

$$f_n = s\left\{\int_0^t \sin nu du\right\} = s\left\{\frac{1-\cos nt}{n}\right\}$$

であるから

(37)
$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\{\sin nt\} = s\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos nt}{n}\right\} = s\cdot 0 = 0$$

例 3　$\left(\dfrac{s}{n}-I\right)=s^2\left\{\dfrac{h}{n}-h^2\right\}$ については

(38)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}-I\right) = s^2\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{h}{n}-h^2\right)\right\} = s^2(-h^2) = -I$$

例 4　$\left(\dfrac{s}{n}-I\right)^{-1}=\dfrac{I}{s/n-I}=\dfrac{n}{s-n}=\{ne^{nt}\}$ に対しては

$$\text{超函数的極限}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}-I\right)^{-1}$$

は存在しない.

証明　$\dfrac{b}{a}\neq 0$ で $\dfrac{b}{a}\{ne^{nt}\}=\{\hat{f}_n(t)\}\in\mathscr{C}$，かつ $[0, T]$ で一様に $\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(t)=\hat{f}(t)\in\mathscr{C}$ が存在すると仮定して矛盾に導こう．

上の仮定から，$n\to\infty$ なるときに

$$a\{\hat{f}_n(t)\} = b\{ne^{nt}\} = n\left\{\int_0^t b(t-u)e^{nu}du\right\}$$

が $0\leqq t\leqq T$ で一様に収束する筈である．ゆえに $t=T$ として，

$$\text{有限な極限}\ \lim_{n\to\infty} n\int_0^T b(T-u)e^{nu}du$$

が存在しなければならない．したがって

$$\sup_{n=1,2,\cdots}\left|\int_0^T b(T-u)e^{nu}du\right| = M_T < +\infty$$

なる正数 M_T が存在する．よって Lerch の定理（命題 13）により $b(T-u)=0$ $(0\leqq u\leqq T$ で$)$ となる．すなわち $b(t)$ は $t\in[0, T]$ のすべてで 0 になる．

ところが $T>0$ は任意であったから $b=0$ となり，$\dfrac{b}{a}\neq 0$ ということに反する．▎

例 5　$\{f(t)\}\in\mathscr{C}$ が $f(t)\geqq 0$ および $\int_0^\infty f(t)dt=1$ を満足するとする．このとき，超函数的極限

(39)
$$\lim_{n\to\infty}\{nf(nt)\} = I$$

証明

$$\begin{aligned}\{nf(nt)\} &= s^2h^2\{nf(nt)\}\\ &= s^2h\left\{\int_0^{nt} f(v)dv\right\} = s^2\left\{\int_0^t du\int_0^{nu} f(v)dv\right\}\end{aligned}$$

ところが，任意の有界閉区間 $[0, T]$ において一様収束の意味で

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t du\int_0^{nu} f(v)dv = t$$

が成り立つ．<u>以下その証明</u>　$0\leqq t\leqq T$ とし

$$\lim_{n\to\infty}\left[t-\int_0^t dt\int_0^{nt} f(v)dv\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^t\left[1-\int_0^{nu} f(v)dv\right]du$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^t\left[\int_{nu}^{\infty} f(v)dv\right]du = 0 \qquad \left(\int_0^{\infty} f(v)dv=1\right)$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\{nf(nt)\} = s^2\{t\} = s\{1\} = I$$ ▮

例　超函数的極限の意味で

(39)′ $$\lim_{n\to\infty}\{ne^{-nt}\} = I,\ \lim_{n\to\infty}\{n^2te^{-nt}\} = I$$

物理学者 P. A. M. Dirac の導入した**デルタ函数**が，具体的な函数列 $\{ne^{-nt}\}$ や函数列 $\{n^2te^{-nt}\}$ などの超函数的極限として与えられるわけである.

例 6　任意の複素数 β と $\lambda>0$ とに対し

(40) $$(I-\beta e^{-\lambda s})^{-1} = s^2\{f_\beta(\lambda,t)\}$$

ここに $f_\beta(\lambda)=\{f_\beta(\lambda,t)\}$ は，次式で与えられる**複素数値函数**:

(41) $$\begin{cases} T\geqq\lambda \text{ とするとき，} 0\leqq t\leqq T \text{ においては} \\ \{f_\beta(\lambda,t)\} = h^2+\beta\{h_1(\lambda,t)\}+\beta^2\{h_1(2\lambda,t)\}+\cdots+\beta^k\{h_1(k\lambda,t)\} \\ (\text{ここに } k\lambda\leqq T<(k+1)\lambda;\ k=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

で表現される**超函数値函数**である.

註　$T\geqq\lambda$ とするとき，$0\leqq t\leqq T$ においては

$$s^2\{f_\beta(\lambda,t)\} = I+\beta e^{-\lambda s}+\beta^2e^{-2\lambda s}+\cdots+\beta^ke^{-k\lambda s}$$
$$(\text{ここに } k\lambda\leqq T<(k+1)\lambda;\ k=1,2,\cdots)$$

しかも

$$(I-\beta e^{-\lambda s})(I+\beta e^{-\lambda s}+\beta^2e^{-2\lambda s}+\cdots+\beta^ke^{-k\lambda s})$$
$$= (I+\beta e^{-\lambda s}+\beta^2e^{-2\lambda s}+\cdots+\beta^ke^{-k\lambda s})(I-\beta e^{-\lambda s})$$
$$= I-\beta^{k+1}e^{-(k+1)\lambda s}$$

であり，かつ超函数的極限

$$\lim_{n\to\infty}\beta^ne^{-n\lambda s} = \lim_{n\to\infty}s^2\beta^nh^2e^{-n\lambda s}$$
$$= s^2\{\lim_{n\to\infty}\beta^nh_1(n\lambda,t)\} = s^2\cdot 0 = 0$$

であることが，

$0 \leqq t \leqq T < (k+1)\lambda$ なるとき，$n \geqq (k+1)$ ならば

$n\lambda > t$ によって

$$h_1(n\lambda, t) = 0 \qquad (\S 18 \text{ の } (2) \text{ をみよ})$$

であることからわかる.

このようにして，超函数的極限

$$\lim_{k\to\infty}(I+\beta e^{-\lambda s}+\beta^2 e^{-2\lambda s}+\cdots+\beta^k e^{-k\lambda s}) \tag{42}$$

を冪級数の形に

$$I+\beta e^{-\lambda s}+\beta^2 e^{-2\lambda s}+\cdots+\beta^k e^{-k\lambda s}+\cdots \tag{42$'$}$$

と書けば[1]，これが $(I-\beta e^{-\lambda s})$ の逆オペレイターであることがわかったので (42)′ を

$$\frac{I}{(I-\beta e^{-\lambda s})} = (I-\beta e^{-\lambda s})^{-1} \tag{43}$$

と書き表わすことにすると次式が成り立つ.

$$(I-\beta e^{-\lambda s})^{-1} = \frac{I}{I-\beta e^{-\lambda s}} = s^2\{f_\beta(\lambda, t)\} \tag{40$'$}$$

例 7　$\lambda > 0$ とし $\mathscr{K}[0, \infty)$ に属する函数 $f = \{f(t)\}$ が，$\lambda < t < \infty$ で 0 であるとすれば，$\mathscr{K}[0, \infty)$ に属する函数

$$\begin{cases} g = \{g(t)\} = (I-e^{-\lambda s})^{-1} f \\ \quad = f + e^{-\lambda s} f + e^{-2\lambda s} f + \cdots + e^{-k\lambda s} f + \cdots \end{cases} \tag{44}$$

は λ を週期とする週期函数である：$g(t+\lambda) = g(t)$

証明　§18 に述べたように

$$e^{-k\lambda s} f = \begin{Bmatrix} 0, & 0 \leqq t < k\lambda \\ f(t-k\lambda), & 0 < k\lambda < t \end{Bmatrix} \in \mathscr{K}$$

であることからわかる.

註　$g \in \mathscr{K}[0, \infty)$ が λ を週期としているならば

$$g = (I-e^{-\lambda s})^{-1} f, \quad f = (I-e^{-\lambda s}) g \in \mathscr{K}[0, \infty)$$

のごとく表現され，$\{f(t)\}$ は $\lambda < t < \infty$ で 0 になる.

---

1)　このようにして，$e^{-\lambda s}$ の任意の冪級数 $(I+\beta_1 e^{-\lambda s}+\beta_s e^{-2\lambda s}+\cdots+\beta_k e^{-k\lambda s}+\cdots)$ も意味をもつことがわかる.

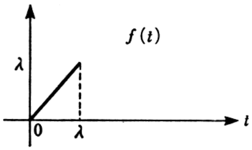
例 7 の具体例　$\lambda>0$ とし

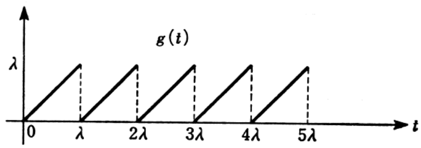
$$f=\{f(t)\}=h^2-e^{-\lambda s}(h^2+\lambda h)$$
$$=\{t\}-\begin{Bmatrix}0, & 0\leqq t<\lambda\\ t+\lambda-\lambda, & 0<\lambda\leqq t\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}t, & 0\leqq t<\lambda\\ 0, & 0<\lambda\leqq t\end{Bmatrix}$$

であるから

$$f=\frac{I}{s^2}-\left(\frac{I}{s^2}+\frac{[\lambda]}{s}\right)e^{-\lambda s},$$
$$g=(I-e^{-\lambda s})^{-1}f$$

に対し，そのグラフは次のようになる．





すなわち，g のグラフは鋸の歯のようになっている．

§24　$\{f(t)\}\in\mathscr{C}$ ならば $\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda=\{f(t)\}$

まず一般に超函数値 $\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$ をとる函数 $F(\lambda)\,(\lambda_1<\lambda<\lambda_2)$ の λ に関する積分

(45)
$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}F(\lambda)d\lambda$$

の定義を，§21 に与えた λ に関しての微分 $\dfrac{dF(\lambda)}{d\lambda}=F'(\lambda)$ の定義にならって与える．すなわち，

$F(\lambda)$ に対して，$\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2$，$0\leqq t<\infty$ において連続な複素数値函数 $\{\hat{F}(\lambda,t)\}$ と $\mathscr{C}/\mathscr{C}$ の元 $\dfrac{b}{a}\neq0$ とを選んで

$$\frac{b}{a}F(\lambda)=\{\hat{F}(\lambda,t)\}$$

と出来るとする．このとき，**超函数的積分** (45) を次のように定義する．

(45)′
$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}F(\lambda)d\lambda=\frac{a}{b}\left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\hat{F}(\lambda,t)d\lambda\right\}$$

註　この定義が合理的(無矛盾的)であることをいう為には，次のことを証明

しなければならない．すなわち $\dfrac{b_1}{a_1}\neq 0$ により，$\dfrac{b_1}{a_1}F(\lambda)=\{\hat{\hat{F}}(\lambda,t)\}$ が $\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2$, $0\leqq t<\infty$ において連続な複素数値函数になったとする．このとき

$$\frac{a}{b}\left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\hat{F}(\lambda,t)d\lambda\right\}=\frac{a_1}{b_1}\left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\hat{\hat{F}}(\lambda,t)d\lambda\right\} \tag{46}$$

が成り立つ．これをいう為に，

$$F(\lambda)=\frac{a}{b}\{\hat{F}(\lambda,t)\}=\frac{a_1}{b_1}\{\hat{\hat{F}}(\lambda,t)\}$$

から $ab_1\{\hat{F}(\lambda,t)\}=a_1b\{\hat{\hat{F}}(\lambda,t)\}$．これを λ に関して積分して

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\lambda\left(\int_0^t ab_1(t-u)\hat{F}(\lambda,u)du\right)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\lambda\left(\int_0^t a_1b(t-u)\hat{\hat{F}}(\lambda,u)du\right)$$

を得る．積分の順序を逆にして

$$ab_1\left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\hat{F}(\lambda,t)d\lambda\right\}=a_1b\left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\hat{\hat{F}}(\lambda,t)d\lambda\right\}$$

この両辺に $\dfrac{I}{b_1b}=\dfrac{I}{b_1}\dfrac{I}{b}$ を乗じて(46)が証明された．▌

この積分の定義を用いて

定理 16　$\{f(t)\}\in\mathscr{C}$ ならば

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda=\{f(t)\} \tag{46$'$}$$

証明　$0\leqq\lambda<\infty$，$0\leqq t<\infty$ ならば

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=e^{-\lambda s}f(\lambda)=s^2h^2e^{-\lambda s}f(\lambda)\\&=s^2\{h_1(\lambda,t)f(\lambda)\}=s^2\begin{Bmatrix}0,\ 0\leqq t<\lambda\\(t-\lambda)f(\lambda),\ 0\leqq\lambda\leqq t\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda&=s^2\left\{\int_0^\infty h_1(\lambda,t)f(\lambda)d\lambda\right\}\\&=s^2\left\{\int_0^t(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda\right\}\\&=s\left\{(t-t)f(t)+\int_0^t\frac{\partial(t-\lambda)}{\partial t}f(\lambda)d\lambda+\int_0^0(0-\lambda)f(\lambda)d\lambda\right\}\\&=s\left\{\int_0^t f(\lambda)d\lambda\right\}=\left\{f(t)+\int_0^0 f(\lambda)d\lambda\right\}\end{aligned}$$

$$=\{f(t)\}$$ ∎

註　(46)′における積分は，複素数函数 $f(\lambda)$ の超函数論的 Laplace 積分とでも呼ぶべきものであろう．**Heaviside の演算子法**では微分オペレイターにあたるものを記号 p で表わしている[1]．彼の演算子法の数学的基礎は，彼が数学者でないことにもよるのか甚だわかりにくい．そのために，J. R. Carson (1926), H. Jeffreys (1931), W. K. Wagner (1950), G. Doetsch (1958) など多くの応用数学者たちが，Heaviside 演算子法を Laplace 変換

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \quad \text{または} \quad p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

によって基礎付ける努力をしたのであった．

しかしこの考え方では

$$\text{無限積分}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

が収束する為に，複素数値函数 $f(t)$ の $t\to\infty$ における増大の仕方に制限が付いて来るという難点がある．たとえば，$f(t)=e^{t^2}$ に対しては

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}e^{t^2}dt$$

は収束しない．そうすると §10 でも取扱った

$$y'-y=\{(2t-1)e^{t^2}\},\quad y(0)=0$$

を Laplace 変換による方法で解くことは出来ない．この方程式の解は $y(t)=e^{t^2}+e^{-t}$ で与えられるのであるが[2]．

合成積環の考えに基づいた積分オペレイター h，微分オペレイター $s=\dfrac{I}{h}$，数値オペレイター $[\alpha]=s\{\alpha\}$，および推移オペレイター $e^{-\lambda s}$，拡散オペレイター $\exp(-\lambda s^{1/2})$ などの超函数を導入して，数学的に疑義のない演算子法を創めたのが J. Mikusiński のすぐれた貢献なのである．彼の方法は相当の予備知識を必要とする Laplace 変換を知らなくても理解し活用できるという簡明さを大

1)　O. Heaviside: Electromagnetic Theory, 1-3, London (1893-1899).

2)　どのような理論も万能ではあり得ないのだから，上の微分方程式に適用できないとしても，Laplace 変換が演算子法その他相当に広い範囲に有効であることは良く知られていることである．巻末の「参考した文献」11 および 12 などを見よ．

きな利点としているのである.

なお演算子法を，L. Schwartz による超函数論すなわちいわゆるディストリビューション理論に基づいて組立てたものとして

Gregers Krabbe : Operational Calculus, Springer-Verlag (1970)

がある.

§25　指数函数 $\exp(-\lambda s^{1/2})=e^{-\lambda s^{1/2}}$　$(-\infty<\lambda<\infty)$

命題 19　$\lambda>0$, $t\geqq 0$ で定義された複素数値函数

$$f(\lambda,t)=\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\lambda^2/4t}\qquad (f(\lambda,0)=0) \tag{47}$$

は，超函数的に

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\lambda}\{f(\lambda,t)\} = -s^{1/2}\{f(\lambda,t)\}\in\mathcal{C}_H{}^{1)}\subseteqq\mathcal{C}/\mathcal{C} \\ \lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\{f(\lambda,t)\} = I \end{cases} \tag{48}$$

を満足する．ここに $s^{1/2}$ は s の分数冪オペレイターである(§13 の(17)式).

証明　$\{f(\lambda,t)\}\in\mathcal{C}$ であるから §13 の(11)によって

$$h^{1/2}\{f(\lambda,t)\} = \left\{\frac{\lambda}{2\pi}(t-u)^{-1/2}u^{-3/2}\exp(-\lambda^2/4u)du\right\}$$

ここで変数変換 $u\to\sigma$ を

$$u=\left(\frac{1}{t}+\frac{4\sigma^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$$

によって施こす．そうすると

$$\begin{aligned}
&(t-u)^{-1/2}u^{-3/2}\\
&=\left(t-1\Big/\left(\frac{1}{t}+\frac{4\sigma^2}{\lambda^2}\right)\right)^{-1/2}\left(1\Big/\left(\frac{1}{t}+\frac{4\sigma^2}{\lambda^2}\right)\right)^{-3/2}\\
&=\left(\left(1+\frac{4\sigma^2 t}{\lambda^2}-1\right)\Big/\left(\frac{1}{t}+\frac{4\sigma^2}{\lambda^2}\right)\right)^{-1/2}\left(1\Big/\left(\frac{1}{t}+\frac{4\sigma^2}{\lambda^2}\right)\right)^{-3/2}\\
&=\frac{\lambda}{2\sigma t^{1/2}}\left(\frac{1}{t}+\frac{4\sigma^2}{\lambda^2}\right)^2,
\end{aligned}$$

1)　§13 の(17)によって $s^{1/2}\in\mathcal{C}_H$ である.

$$\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4u}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}-\sigma^2\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)e^{-\sigma^2},$$

$$du = -\left(\frac{8\sigma}{\lambda^2}\Big/\left(\frac{1}{t}+\frac{4\sigma^2}{\lambda^2}\right)^2\right)d\sigma$$

であるから

$$h^{1/2}\{f(\lambda,t)\} = \int_\infty^0 -\frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\lambda}{2\sigma t^{1/2}}\,\frac{8\sigma}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)e^{-\sigma^2}d\sigma$$

すなわち，$\int_0^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma=\sqrt{\pi}/2$ を用いて

$$h^{1/2}\{f(\lambda,t)\} = \frac{I}{\sqrt{s}}\{f(\lambda,t)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\lambda^2/4t}\right\} \tag{49}$$

が得られた．ゆえに

$$\begin{cases} \{f(\lambda,t)\} = \dfrac{h}{h^{3/2}}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\lambda^2/4t}\right\} \\ \qquad\qquad = s^{3/2}\left\{\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi u}}e^{-\lambda^2/4u}du\right\} \end{cases} \tag{50}$$

となって**超函数的微分**

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\{f(\lambda,t)\} &= s^{3/2}\left\{\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}\exp(-\lambda^2/4u)du\right\} \\ &= s^{1/2}s\left\{\int_0^t \frac{-1}{\sqrt{\pi u}}\,\frac{\lambda}{2u}\exp(-\lambda^2/4u)du\right\} \\ &= -s^{1/2}\left\{f(\lambda,t)+\int_0^0 \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi u^3}}\exp(-\lambda^2/4u)du\right\} \\ &= -s^{1/2}\{f(\lambda,t)\} \end{aligned}$$

さらに§13の(11)と(50)から超函数的極限

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\downarrow 0}\{f(\lambda,t)\} &= s^{3/2}\left\{\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi u}}\exp(-\lambda^2/4u)du\right\} \\ &= s^{3/2}\left\{\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi u}}du\right\} = s^{3/2}\cdot h\cdot h^{1/2} \\ &= s^{3/2}\cdot h^{3/2} = I \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $f(0,t)=I$ とおいて

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\{f(\lambda,t)\} = f(0,t) = I$$

これで(48)が証明された. ▌

定義　指数函数 $\exp(-\lambda s^{1/2})\,(\lambda\geqq 0)$ を

(51)
$$\begin{cases}\exp(-\lambda s^{1/2})=e^{-\lambda s^{1/2}}=\left\{\dfrac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp(-\lambda^2/4t)\right\} \\ \qquad\qquad (\lambda>0\text{ のとき}) \\ \qquad\qquad\qquad =I\quad(\lambda=0\text{ のとき})\end{cases}$$

で定義すると

(48)′
$$\begin{cases}\dfrac{d}{d\lambda}\exp(-\lambda s^{1/2})=-s^{1/2}\exp(-\lambda s^{1/2}) & (\lambda>0), \\ \lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\exp(-\lambda s^{1/2})=I=\exp(-0\cdot s^{1/2})\end{cases}$$

が成り立つ.

命題 20　$\mu>\lambda>0$ ならば

(52)
$$\exp(-\lambda s^{1/2})\exp(-(\mu-\lambda)s^{1/2})=\exp(-\mu s^{1/2})$$

証明　$f(\lambda)=\exp(-\lambda s^{1/2})$ と書いて

$$f(\lambda)f(\mu-\lambda)=f(\mu)$$

をいえばよい.

命題 16 の(iii)によって超函数的微分につき(48)′から

$$\frac{d}{d\lambda}(f(\lambda)f(\mu-\lambda))=f'(\lambda)f(\mu-\lambda)+f(\lambda)\frac{d}{d\lambda}f(\mu-\lambda)$$
$$=-s^{1/2}f(\lambda)f(\mu-\lambda)+f(\lambda)s^{1/2}f(\mu-\lambda)=0$$

を得る. $\dfrac{d}{d\lambda}f(\mu-\lambda)=\dfrac{d}{d(\mu-\lambda)}f(\mu-\lambda)\cdot\dfrac{d(\mu-\lambda)}{d\lambda}$ であるからである.

ゆえに命題 16 の(iv)によって，$f(\lambda)f(\mu-\lambda)$ は λ に無関係な超函数 $\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ であるから，この超函数は超函数的極限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}f(\lambda)f(\mu-\lambda)=I\cdot f(\mu)$$

に等しいので，結局

$$f(\lambda)f(\mu-\lambda)=f(\mu)$$

がいえた. ▌

定理 17　$s^{3/2}$ は $\mathcal{C}_H$ であったから，$\lambda\geqq 0$ のとき(50)によって

$$\exp(-\lambda s^{1/2}) = s^{3/2}\left\{\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi u}}\exp(-\lambda^2/4u)du\right\} \in \mathcal{C}/\mathcal{C}$$

であり，これは $\neq 0$ であるから環 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ における逆オペレイター $(\exp(-\lambda s^{1/2}))^{-1}$ が存在する．これを

$$(53)\qquad \exp(\lambda s^{1/2}) = \exp(-\lambda s^{1/2})^{-1} = \frac{I}{\exp(-\lambda s^{1/2})}$$

と書くと

$$(54)\qquad \begin{cases}\exp(\lambda s^{1/2})\exp(\mu s^{1/2}) = \exp((\lambda+\mu)s^{1/2}) \\ \qquad (-\infty < \lambda,\ \mu < +\infty)\end{cases}$$

および

$$(55)\qquad \begin{cases}\dfrac{d}{d\lambda}\exp(\lambda s^{1/2}) = s^{1/2}\exp(\lambda s^{1/2}) \qquad (-\infty<\lambda<+\infty), \\ \lim\limits_{\lambda\to 0}\exp(\lambda s^{1/2}) = I = \exp(0\cdot s^{1/2})\end{cases}$$

が成り立つ[1]．故に定理 15 の系におけると同じく

$$(55)'\qquad \frac{d^n}{d\lambda^n}\exp(\lambda s^{1/2}) = (s^{1/2})^n\exp(\lambda s^{1/2}) \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

証明　(53) は Titchmarsh の定理 14 から証明される．(54) は (52) と (53) とから明らか．

(55) の証明　$\exp(\lambda s)$ のときと同じようにできる（定理 15 の証明参照）．$-\infty<\lambda<\infty$ とし $\alpha>\lambda$ である数 α をとって，$f(\lambda)=\exp(\lambda s^{1/2})$ に対して

$$f(\lambda) = f(\alpha)f(\lambda-\alpha)$$

この $f(\alpha)$ は (53) によって $\neq 0$．ゆえに命題 16 の (i) と (48)′ および $(\alpha-\lambda)>0$ によって，超函数的微分

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = f(\alpha)\frac{df(\lambda-\alpha)}{d\lambda} = f(\alpha)\frac{df(\lambda-\alpha)}{d(\lambda-\alpha)}\,\frac{d(\lambda-\alpha)}{d\lambda}$$
$$= f(\alpha)s^{1/2}f(\lambda-\alpha) = s^{1/2}f(\lambda)$$

また，$(\alpha-\lambda)>0$ と $f(\lambda)=f(\alpha)f(\lambda-\alpha)$ とによって超函数的極限について $\alpha>0$

1)　なお定理 15 のときと同じようにして，$f'(\lambda)=s^{1/2}f(\lambda)(-\infty<\lambda<+\infty)$ と $\lim\limits_{\lambda\to 0}f(\lambda)=f(0)=I$ の解 $f(\lambda)$ は $f(\lambda)=\exp(\lambda s^{1/2})$ に限ることも証明できる．これが exp という記法を使った理由でもある．

とおいて[1)]

$$\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda) = f(\alpha)\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda-\alpha) = f(\alpha)f(-\alpha) = I$$

が成り立つ. ▎

系　次の公式が成り立つ.

(49)′
$$\frac{I}{\sqrt{s}}\exp(-\lambda s^{1/2}) = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp(-\lambda^2/4t)\right\},$$

(56)
$$\frac{I}{s}\exp(-\lambda s^{1/2}) = \left\{\mathrm{Cerf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right\}^{2)}$$

証明　(49)′ は (49) の $h^{1/2}$ を $\frac{I}{s^{1/2}}$ と書けばよい. また (56) は, (51) から得る

$$\frac{I}{s}\exp(-\lambda s^{1/2}) = h\exp(-\lambda s^{1/2})$$

$$= \left\{\int_0^t \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi u^3}}\exp(-\lambda^2/4u)du\right\}$$

において変数変換 $u\to\sigma=\frac{\lambda}{2\sqrt{u}}$ を施せばよい.

註　$f(\lambda)=\exp(-\lambda s^{1/2})$ とおけば

$$f'(\lambda) = -s^{1/2}f(\lambda),$$

$$f''(\lambda) = (f'(\lambda))' = -s^{1/2}f'(\lambda) = s^{1/2}s^{1/2}f(\lambda)$$

$$= sf(\lambda)$$

を得る. s は t に関する微分オペレイターであるから, $\exp(-\lambda s^{1/2})$ は, 熱方程式または拡散方程式と呼ばれる

$$z_{\lambda\lambda} = z_t$$

に密接に関係する(第3部を見よ). この意味で $\exp(-\lambda s^{1/2})(\lambda\geqq 0)$ を**熱オペレイター**または**拡散オペレイター**, さらにまた**放物型指数函数**と呼ぶことがある.

---

1)　$f(\lambda-\alpha)=\left\{\frac{\alpha-\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-(\alpha-\lambda)^2/4t}\right\}$ であるから.

2)　$\mathrm{Cerf}\,t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2}du=1-\mathrm{Erf}\,t,$

$\mathrm{Erf}\,t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du$ (§13 の 43 頁の脚註)

§26 対数的超函数 w と指数的超函数 $\exp(\lambda w)$

定義 超函数値函数 $f(\lambda), -\infty<\lambda<\infty$, が超函数 $w \in \mathcal{C}/\mathcal{C}$ によって

$$(57)\qquad \begin{cases} f'(\lambda) = \dfrac{df(\lambda)}{d\lambda} = wf(\lambda) & (-\infty<\lambda<\infty), \\ \lim\limits_{\lambda\to 0} f(\lambda) = f(0) = I \text{ および } f(\lambda) \neq 0 \end{cases}$$

を満足するときに[1]，w を**対数的超函数**，$f(\lambda)$ を**指数的超函数**と呼ぶ.

註 (55)′ のときと同じく

$$(57)'\qquad \frac{d^n}{d\lambda^n} f(\lambda) = f^{(n)}(\lambda) = w^n f(\lambda) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つ．すなわち**指数的超函数**は λ について<u>無限回微分可能である.</u>

対数的超函数の例 s や $s^{1/2}$ など

命題 21 $w \in \mathcal{C}/\mathcal{C}$ が対数的超函数であれば (57) を満足する超函数値函数 $f(\lambda)$ は一意的に定まり，かつ**加法定理**

$$f(\lambda)f(\mu-\lambda) = f(\mu) \qquad (-\infty<\lambda,\ \mu<\infty)$$

を満足する.

証明 $\exp(\lambda s^{1/2})$ のときと同じようにやるとよい．この命題のお蔭で (57) の解 $f(\lambda)$ を

$$f(\lambda) = \exp(\lambda w) = e^{\lambda w}$$

と書くことが出来るのである. ▌

すべての $w \in \mathcal{C}/\mathcal{C}$ が対数的超函数でないことは次の反例からわかる.

命題 22 $w=is=\sqrt{-1}\,s$ は対数的超函数ではない.

証明[2] $f(\lambda)$ が $w=is$ とした上の (57) の解であったとして矛盾に導く.

超函数的微分の定義 (§21) から，$\lambda=0$ を内部に含む閉区間 $[\lambda_1, \lambda_2]$ を適当にとると，$\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の元 $\dfrac{b}{a} \neq 0$ で次のようなものが存在する．すなわち

$$\frac{b}{a} f(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \{\hat{f}(\lambda, t)\}$$

---

1) $f'(\lambda)$ は，$f(\lambda)$ の λ に関する超函数的微分 (§21)．また $\lim\limits_{\lambda\to 0} f(\lambda)$ は，λ に関する超函数的極限 (§23) を意味する.

2) Mikusiński: 演算子法(邦訳の下巻 p. 397)

が，(λ, t) の領域

$$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2,\quad t \geqq 0$$

において連続であるような偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda, t)$ をもつところの複素数値函数 $\hat{f}(\lambda, t)$ が存在する．そうして $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2, t \geqq 0$ において

$$f'(\lambda) = \frac{a}{b}\hat{f}'(\lambda) = \frac{a}{b}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}(\lambda, t)\right\} = isf(\lambda)$$

$$= is\frac{a}{b}\hat{f}(\lambda) = is\frac{a}{b}\{\hat{f}(\lambda, t)\}$$

が成り立つ．

このとき $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda_2 - \lambda_1}$ として，$\hat{f}'(\lambda) = is\hat{f}(\lambda)$ から $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-in\omega\lambda}\hat{f}'(\lambda)d\lambda = is\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-in\omega\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda$$

左辺は部分積分と $e^{-in\omega\lambda_2} = e^{-in\omega\lambda_1}$ とにより

$$e^{-in\omega\lambda_2}(\hat{f}(\lambda_2) - \hat{f}(\lambda_1)) + in\omega\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-in\omega\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda$$

となる．ゆえに

$$e^{-in\omega\lambda_2}(\hat{f}(\lambda_2) - \hat{f}(\lambda_1)) = i(s - n\omega)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-in\omega\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda$$

これから

$$\frac{\hat{f}(\lambda_2) - \hat{f}(\lambda_1)}{s - n\omega} = ie^{in\omega\lambda_2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-in\omega\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda$$

この左辺は，$\hat{f}(\lambda_2) - \hat{f}(\lambda_1) \in \mathscr{C}$ かつ $\dfrac{I}{s - n\omega} = \{e^{n\omega t}\}$ であるから，$\in \mathscr{C} = C[0, \infty)$，ゆえに t の函数として

$$\text{(58)}\qquad \left|\frac{\hat{f}(\lambda_2, t) - \hat{f}(\lambda_1, t)}{s - n\omega}\right| \leqq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\hat{f}(\lambda, t)|d\lambda \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．よって

$$g = \{g(t)\} = \left\{\frac{\hat{f}(\lambda_2, t) - \hat{f}(\lambda_1, t)}{s}\right\},$$

$$k = \{k(t)\} = \left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\hat{f}(\lambda, t)|d\lambda\right\}$$

とおいて，(58) から

$$\left|\frac{g(t)}{s-n\omega}\right| = h\cdot\left|\frac{\hat{f}(\lambda_2,t)-\hat{f}(\lambda_1,t)}{s-n\omega}\right| \leqq h\cdot k(t)$$

すなわち

$$\left|\int_0^t g(t-u)e^{n\omega u}du\right| \leqq \int_0^t k(u)du \qquad (n=1,2,\cdots)$$

が得られた.

ゆえに命題13(Lerch の定理)により

$$\text{すべての } u\,(0 \leqq u \leqq t) \text{ で } g(t-u) = 0$$

すなわち $g(u)=0\,(0\leqq u\leqq t)$．$t$ は任意であったから，すべての $t\geqq 0$ で

$$\hat{f}(\lambda_2,t) = \hat{f}(\lambda_1,t) \quad \text{これから} \quad \hat{f}(\lambda_2) = \hat{f}(\lambda_1)$$

となるので $f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$ となった．$\lambda_1<0<\lambda_2$ なる λ_1, λ_2 は任意であったから，結局 $f(\lambda)=I\,(-\infty<\lambda<+\infty)$ となって $f'(\lambda)=0$ となる.

そうすると $f'(\lambda)=0=isf(\lambda)$ から $f(\lambda)=0$ となって $f(\lambda)=I$ と矛盾する. ❙

命題 23　$w_1\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$，$w_2\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ がともに対数的超函数ならば，任意の実数 α_1, α_2 に対して一次結合 $(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2)$ もまた対数的超函数で

$$\exp(\lambda\alpha_1 w_1)\exp(\lambda\alpha_2 w_2) = \exp(\lambda(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2))$$

が成り立つ.

証明　$f(\lambda)=\exp(\lambda\alpha_1 w_1)\exp(\lambda\alpha_2 w_2)$ に対して，命題16の(iii)から

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \alpha_1 w_1 \exp(\lambda\alpha_1 w_1)\exp(\lambda\alpha_2 w_2) \\ &\quad +\exp(\lambda\alpha_1 w_1)\alpha_2 w_2 \exp(\lambda\alpha_2 w_2) \\ &= (\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2)f(\lambda) \end{aligned}$$

および $f(0)=I$ が成り立つ．ゆえに命題21を用いればよい.

対数的超函数の例

例 1　$w=f=\{f(t)\}$ が $\neq 0$ かつ $\in\mathcal{C}$ ならば f は対数的超函数である.

証明　§23の(36)のなかで示したように，任意の $T>0$ に対して[1)]

$$\begin{cases} |f^n(t)| \leqq M^n t^{n-1}/(n-1)! & (0\leqq t\leqq T;\ n=1,2,\cdots) \\ M_T = \sup\limits_{0\leqq t\leqq T}|f(t)| = M < +\infty & \end{cases}$$

1)　$f^1=f, f^2=f\cdot f=f*f$ (合成積)，$f^3=f\cdot f^2, \cdots$

であるから，$f^0=I$ として

$$(59)_1 \qquad \exp(\lambda f)=I+\{f(\lambda,t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}f^n\in\mathcal{C}_H\subseteqq\mathcal{C}/\mathcal{C}$$

が**超函数的極限**として定義され，かつ**超函数的微分**について

$$\frac{d\exp(\lambda f)}{d\lambda}=\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,t)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}f^n$$

$$=f\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}f^n=f\cdot\exp(\lambda f)$$

が成り立ち，かつ $\exp(0\cdot f)=I$ である．▎

例1の応用として

命題 24　α を正の整数とすれば，$w=s-\sqrt{s^2+\alpha^2}$ は対数的超函数であり，次式が成り立つ．

$$(59) \qquad \exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2}))=I-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

証明　§17 の (21) によって

$$\sqrt{s^2+\alpha^2}-s=\left\{\frac{\alpha}{t}J_1(\alpha t)\right\}\in\mathcal{C}$$

であるから，例1によって

$$(60) \qquad \begin{cases}\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2}))\\ =I+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-\lambda)^{n+1}(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^{n+1}\end{cases}$$

ところが同じく §17 の (22) によって

$$(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^{n+1}=\left\{(-1)^n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2+2k}t^{2k-n}}{2^{1+2k-n}(k-n)!(k+1)!}\right\}$$

この式を (60) に代入して，和の順序を交換すると

$$(61) \qquad \exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2}))$$

$$=I-\left\{\lambda\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2+2k}t^k}{2^{1+2k}k!(k+1)!}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!\lambda^n t^{k-n}}{2^{-n}(k-n)!n!}\right\}$$

$$=I-\left\{\lambda\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2+2k}t^k}{2^{1+2k}k!(k+1)!}(t+2\lambda)^k\right\}$$

ここで §15 の (8) における $J_1(t)$ の展開を用い

$$\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2}))=I-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

が得られた. ▌

系 1

$$\frac{\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2}))}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}=\{J_0(\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\} \tag{62}$$

証明　(61)を α について微分して $(-\alpha\lambda)$ で割れば[1]

$$\frac{\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2}))}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2k}t^k}{2^{2k}(k!)^2}(t+2\lambda)^k\right\}$$

この右辺に§15の(8)における $J_0(t)$ の展開式を用いると, (62)が得られる.

系 2　(59)と(62)は, α についての冪級数展開を利用して導いたものであるので, これらは $\lambda\geqq 0$ と任意の複素数 α とに対しても成り立つ(49頁の脚註を見よ). 故に, 特に α を $i\alpha=\sqrt{-1}\,\alpha$ でおき替えると

$$\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2-\alpha^2}))=I-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\} \tag{59$'$}$$

$$\frac{\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2-\alpha^2}))}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}=\{J_0(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\} \tag{62$'$}$$

が成り立つ.

系 3　(59), (62), (59)′, (62)′ に $\exp(-\lambda s)$ を乗じて63頁の註3により

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2+\alpha^2})=e^{-\lambda s}-\left\{\begin{array}{l}0,0\leqq t<\lambda\\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}}\alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}),\ \ 0\leqq\lambda<t\end{array}\right\} \tag{59$''$}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2+\alpha^2})}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}=\left\{\begin{array}{l}0,\ \ 0\leqq t<\lambda\\ J_0(\alpha\sqrt{t^2-\alpha^2}),\ \ 0\leqq\lambda<t\end{array}\right\} \tag{62$''$}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2-\alpha^2})=e^{-\lambda s}-\left\{\begin{array}{l}0,\ \ 0\leqq t<\lambda\\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}}i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\alpha^2}),\ \ 0\leqq\lambda<t\end{array}\right\} \tag{59$'''$}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2-\alpha^2})}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}=\left\{\begin{array}{l}0,\ \ 0\leqq t<\lambda\\ J_0(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}),\ \ 0\leqq\lambda<t\end{array}\right. \tag{62$'''$}$$

---

1)　$f(\alpha)=\{f(\alpha,t)\}$ がパラメター α について超函数的に微分できる(§21)ならば, $d/d\alpha\,\exp(f(\alpha))=f'(\alpha)\cdot\exp(f(\alpha))$ である.

演　習　問　題

$w\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ を対数的超函数，$f(\lambda)$ を $-\infty<\lambda<\infty$ で連続な複素数値函数とする．

$$z(\lambda)=z_0\exp((\lambda-\lambda_0)w)+\int_{\lambda_0}^{\lambda}\exp((\lambda-\mu)w)f(\mu)d\mu$$

が初期条件 $z(\lambda_0)=z_0$ に応ずる

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda}-wz(\lambda)=f(\lambda)I$$

の解であることを示せ，この解は一意解(唯一つの解)であるか．

§27　補遺．Weierstrass の多項式近似定理の証明

定理 18　(Weierstrass の多項式近似定理)閉区間 $[0,1]$ で連続な複素数値函数 $f(t)$ に対して t の多項式

(63)
$$P_n(t)=\sum_{p=0}^{n}{}_nC_pf\left(\frac{p}{n}\right)t^p(1-t)^{n-p}$$

を作ると，$n\to\infty$ のとき $0\leqq t\leqq 1$ なる t に関して一様収束の意味で次の式が成り立つ：

(64)
$$\lim_{n\to\infty}P_n(t)=f(t)$$

証明　(S. Bernstein[1] による——上のような定理の述べ方も含めて)．二項定理

(65)
$$(t+u)^n=\sum_{p=0}^{n}{}_nC_pt^pu^{n-p}$$

を t で微分して t 倍し

(66)
$$nt(t+u)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n}p_nC_pt^pu^{n-p}$$

同じく(65)を t で2回微分して t^2 倍すると

(67)
$$n(n-1)t^2(t+u)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n}p(p-1)_nC_pt^pu^{n-p}$$

1)　ベルンシュタイン(1880-1968)

を得る．ゆえに

(68)　$r_p(t) = {}_nC_p t^p(1-t)^{n-p}$

とおくと

$$(69)\qquad \begin{cases} \sum_{p=0}^{n} r_p(t) = 1,\ \sum_{p=0}^{n} p\cdot r_p(t) = nt \\ \sum_{p=0}^{n} p(p-1) r_p(t) = n(n-1)t^2 \end{cases}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{n}(p-nt)^2 r_p(t) \\ &= n^2t^2\sum_{p=0}^{n} r_p(t) - 2nt\sum_{p=0}^{n} p r_p(t) + \sum_{p=0}^{n} p^2 r_p(t) \\ &= n^2t^2 - 2nt\cdot nt + (nt + n(n-1)t^2) = nt(1-t) \end{aligned}$$

すなわち

$$(70)\qquad \sum_{p=0}^{n}(p-nt)^2 r_p(t) = nt(1-t)$$

さて $f(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で連続であるから，ここで一様連続である．すなわち任意の正数 ε に対して正数 δ を選んで

(71)　$|t-t'|<\delta$ ならば，つねに $|f(t)-f(t')|<\varepsilon$，同じくまた正数 M が存在して

$$(72)\qquad \max_{0 \leqq t \leqq 1} |f(t)| = M < +\infty$$

とできる．

ゆえに (69) を用い

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) r_p(t) \right| &= \left| \sum_{p=0}^{n} \left(f(t) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right) r_p(t) \right| \\ &\leqq \left| \sum_{|p-nt| \leqq \delta n} \right| + \left| \sum_{|p-nt| > \delta n} \right| \end{aligned}$$

この右辺第１項に対して，$r_p(t) \geqq 0$ と (69) および (71) により

$$\left| \sum_{|p-nt| \leqq \delta n} \right| \leqq \varepsilon \sum_{p=0}^{n} r_p(t) = \varepsilon$$

また右辺第２項に対しては，(70) と (72) とにより

$$\left|\sum_{|p-nt|>\delta n}\right| \leqq 2M \sum_{|p-nt|>\delta n} r_p(t)$$
$$\leqq \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nt)^2 r_p(t) \leqq \frac{2Mt(1-t)}{n\delta^2} \leqq \frac{M}{2\delta^2 n}$$

を得る．この最右辺は $n\to+\infty$ のとき $\to 0$ となる．こうして(64)が証明された．∎

第Ⅲ部　偏微分方程式への応用

第Ⅲ部のねらい

主として

波動方程式　$z_{\lambda\lambda}(\lambda, t)=\alpha^2 z_{tt}(\lambda, t)$,

電信方程式　$z_{\lambda\lambda}(\lambda, t)=z_{tt}(\lambda, t)+2\kappa z_t(\lambda, t)+\gamma z(\lambda, t)$,

熱 方 程 式　$z_{\lambda\lambda}(\lambda, t)=\alpha^2 z_t(\lambda, t)$

を，超函数方程式に転換して研究する．まず

波動方程式を $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, $t \geqq 0$ において考える．微分オペレイター s の性質により

$$s^2 z(\lambda, t) = z_{tt}(\lambda, t)+z_t(\lambda, 0)+sz(\lambda, 0)$$

であるから，$z(\lambda, t)$ の満足すべき初期条件が

$$z(\lambda, 0) = \phi(\lambda),\quad z_t(\lambda, 0) = \psi(\lambda)$$

によって与えられるので，波動方程式は超函数値函数 $z(\lambda)=\{z(\lambda, t)\}$ について

$$z''(\lambda)-\alpha^2 s^2 z(\lambda) = -\alpha^2\psi(\lambda)-\alpha^2 s\varphi(\lambda) \tag{1}$$

の形になる．この右辺は λ の実数値函数を係数とする s の 1 次式である．

熱方程式も $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$，$t \geqq 0$ において考えると

$$sz(\lambda, t) = z_t(\lambda, t)+z(\lambda, 0)$$

となるので，$z(\lambda, 0)=\phi(\lambda)$ として，熱方程式は

$$z''(\lambda)-\alpha^2 sz(\lambda) = -\alpha^2\varphi(\lambda) \tag{2}$$

となる．

ゆえに一般に，超函数 $w \in \mathcal{C}/\mathcal{C}$ が対数的超函数であるときに，超函数値函数 $f(\lambda)=\{f(\lambda, t)\}$ について

$$f''(\lambda)-w^2 f(\lambda) = g(\lambda) \qquad (\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2,\ t \geqq 0) \tag{3}$$

の形の**超函数微分方程式**——ただし $g(\lambda)$ は w の 1 次式でこの 1 次式の係数は λ の実数値函数——を取扱うことになった．すなわち $w=s$ の場合が波動方程式，$w=s^{1/2}$ の場合が熱方程式にあたるのである．

注意　微分オペレイター s の性質から $g(\lambda)$ における

$$g(\lambda) = -\alpha^2\phi(\lambda) - \alpha^2 s\varphi(\lambda) \qquad \text{(波動方程式)}$$

の $\phi(\lambda)$ は，各 λ に対して $\phi(\lambda)$ 倍オペレイターをまた $\varphi(\lambda)$ も，各 λ に対して $\varphi(\lambda)$ 倍オペレイターを与えると考えるべきなのである．同じく

$$g(\lambda) = -\alpha^2\varphi(\lambda) \qquad \text{(熱方程式)}$$

における $\varphi(\lambda)$ も，各 λ に対して $\varphi(\lambda)$ 倍オペレイターを与えるものと考えるべきである．

なお**電信方程式**については第8章にくわしく述べる．

註　たとえば絃の振動の場合に，時刻 t において絃の点 λ の，平衡の位置からのずれ(変動)の値を $z(\lambda, t)$ とするときに，偏導函数

$$z_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} z(\lambda, t)$$

がすべての点 λ で連続であると仮定することは，物理現象として稍つよすぎる要求であると思われる．この意味で，$z_{\lambda\lambda}$ の代りに「超函数的微分」$z''(\lambda)$ のような「一般化された微分」を用いる方が取り扱い易いし，また未知函数 z の範囲も広がるので合理的である．このようなことは，L. Schwartz のディストリビューションの意味の微分や，佐藤幹夫の超函数の意味の微分などとも軌を一にしているのである．そして演算子法では，既に第Ⅰ部，第Ⅱ部で，時間変数 t についての微分も超函数的に s による乗法として取扱ったのであった．

第7章　1次元波動方程式(弦の振動)

§28　超函数微分方程式 $f''(\lambda)-w^2f(\lambda)=g(\lambda)$, $w\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$, の解法

命題 25　$w\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$, $k_0\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$, $k_1\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$ とし，w は対数的超函数でかつ $w\neq 0$ とする．このとき

(1)
$$\begin{cases} f(\lambda) = 2^{-1}(k_0+w^{-1}k_1)\exp(\lambda w)+ \\ \qquad 2^{-1}(k_0-w^{-1}k_1)\exp(-\lambda w) \qquad (-\infty<\lambda<\infty) \end{cases}$$

は[1]，$f''(\lambda)=(f'(\lambda))'$ として超函数微分方程式

(2)
$$f''(\lambda)-w^2f(\lambda)=0;\ f(0)=k_0,\ \ f'(0)=k_1$$

の解である．逆に(2)の解は λ- 初期条件[2] $f(0)=k_0$, $f'(0)=k_1$ から一意的に定まり，(1)で与えられる．

証明　命題16によって

$$f'(\lambda) = \frac{1}{2}(k_0+w^{-1}k_1)w\exp(\lambda w)$$
$$+\frac{1}{2}(k_0-w^{-1}k_1)(-w)\exp(-\lambda w),$$

$$f''(\lambda) = \frac{1}{2}(k_0+w^{-1}k_1)w^2\exp(\lambda w)$$
$$+\frac{1}{2}(k_0-w^{-1}k_1)(-w)^2\exp(-\lambda w) = w^2f(\lambda)$$

---

1)　$w\neq 0$ であるから逆元 w^{-1} が存在する(命題14の系)．

2)　時刻を示す t についての条件でないので，混同しないように λ-初期条件と呼んだ．パラメター初期条件といってもよかろう．

である．そしてまた $\exp(0\cdot w)=I$ により

$$f(0)=\frac{1}{2}(k_0+w^{-1}k_1)+\frac{1}{2}(k_0-w^{-1}k_1)=k_0,$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}(k_0+w^{-1}k_1)w+\frac{1}{2}(k_0-w^{-1}k_1)(-w)=k_1$$

も得られる．

次に**解の一意性の証明**　$f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ がともに(2)の解であるとすると，$f(\lambda)=f_1(\lambda)-f_2(\lambda)$ は

$$f''(\lambda)-w^2f(\lambda)=0;\ f(0)=0,\ f'(0)=0$$

を満足する．任意に実数 μ をとり，

$$\hat{f}(\lambda)=f'(\lambda)f(2\mu-\lambda)+f(\lambda)f'(2\mu-\lambda)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\lambda)&=f''(\lambda)f(2\mu-\lambda)-f'(\lambda)f'(2\mu-\lambda)\\&\quad+f'(\lambda)f'(2\mu-\lambda)-f(\lambda)f''(2\mu-\lambda)\\&=w^2f(\lambda)f(2\mu-\lambda)-f(\lambda)w^2f(2\mu-\lambda)=0\end{aligned}$$

となるので，命題16によって $\hat{f}(\lambda)$ は λ に依存しない超函数 $\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ である．この超函数が0であることは，$f(0)=0$ と $f'(0)=0$ とにより

$$\hat{f}(0)=f'(0)f(2\mu)+f(0)f'(2\mu)=0$$

となることから明らかである．

すなわち $\hat{f}(\lambda)=0$．上の $\hat{f}(\lambda)$ の式のなかで μ を λ とおいて

$$0=\hat{f}(\lambda)=f'(\lambda)f(\lambda)+f(\lambda)f'(\lambda)=2f(\lambda)f'(\lambda)$$

これは $(f(\lambda)^2)'=0$ を意味するから，再び命題16によって $f(\lambda)^2$ が λ に依存しない．よって $\lambda=0$ として $f(\lambda)^2=f(0)^2=0$ となるので，Titchmarsh の定理(定理14)によって $f(\lambda)=0$．こうして $f_1(\lambda)-f_2(\lambda)=0$ すなわち $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)$ が証明された．▎

註　上の(1)で与えられる(2)の解 $f(\lambda)$ は次のようにして求められたのであった．すなわち，(2)の2つの解

$$\exp(\lambda w)\quad と\quad \exp(-\lambda w)$$

の，$\mathcal{C}/\mathcal{C}$ の元 a, b による一次結合

(3) $$f_1(\lambda) = a\exp(\lambda w)+b\exp(-\lambda w)$$

は明らかに，$f_1''(\lambda)-w^2f_1(\lambda)=0$ の解になる．この $f_1(\lambda)$ が λ-初期条件

(4) $$f_1(0) = k_0,\quad f_1'(0) = k_1$$

を満足する為には，$\exp(0\cdot w)=I$ を用い

$$f_1(0) = a+b = k_0,\quad f_1'(0) = aw-bw = k_1$$

が満足されることが必要十分である．これから a, b を求めると

$$aw+bw = k_0w,\quad aw-bw = k_1 \quad \text{及び} \quad w \neq 0$$

によって

$$a = \frac{I}{2}(k_0+w^{-1}k_1),\quad b = \frac{I}{2}(k_0-w^{-1}k_1)$$

が得られるので $f_1(\lambda)$ は(1)の $f(\lambda)$ に等しい．

このようにして λ-初期値問題(2)は，普通の常微分方程式

$$y''(x)-\omega^2y(x) = 0;\quad y(0) = \kappa_0,\quad y'(0) = \kappa_1$$

の解法と全く同じである．

命題 26　$w \in \mathcal{C}/\mathcal{C}$ が対数的超函数で $w \neq 0$ とする．$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ (かつ $\lambda_1<0<\lambda_2$ とする) で連続な複素数値函数 $\varphi(\lambda), \psi(\lambda)$ を係数とする w の一次式

(5) $$g(\lambda) = -w\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)$$

に対して

(6) $$\begin{cases} f_0(\lambda) = -(2w)^{-1}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda}\exp((\mu-\lambda)w)g(\mu)d\mu - \\ \qquad\qquad (2w)^{-1}\displaystyle\int_{\lambda}^{\lambda_2}\exp((\lambda-\mu)w)g(\mu)d\mu \end{cases}$$

が次の超函数微分方程式

(7) $$f_0''(\lambda)-w^2f_0(\lambda) = g(\lambda) \qquad (\lambda_1<\lambda<\lambda_2)$$

の解になる．

証明　パラメター λ を含む(6)を λ に関して微分して，$\exp(0\cdot w)=I$ と $\exp(\lambda w)' = w\cdot\exp(\lambda w)$ とを用い，

$$f_0'(\lambda)=\frac{-I}{2w}\Big\{g(\lambda)-\int_{\lambda_1}^{\lambda} w\exp((\mu-\lambda)w)g(\mu)d\mu$$

$$-g(\lambda)+\int_{\lambda}^{\lambda_2} w\exp((\lambda-\mu)w)g(\mu)d\mu\Big\}$$

$$=\frac{-I}{2w}\Big\{\int_{\lambda_1}^{\lambda}-w\exp((\mu-\lambda)w)g(\mu)d\mu$$

$$+\int_{\lambda}^{\lambda_2} w\exp((\lambda-\mu)w)g(\mu)d\mu\Big\}$$

もう一度 λ に関して微分して

$$f_0''(\lambda)=\frac{-I}{2w}\Big\{-wg(\lambda)+\int_{\lambda_1}^{\lambda} w^2\exp((\mu-\lambda)w)g(\mu)d\mu$$

$$-wg(\lambda)+\int_{\lambda}^{\lambda_2} w^2\exp((\lambda-\mu)w)g(\mu)d\mu\Big\}$$

$$=g(\lambda)+w^2f_0(\lambda)$$

∎

定理 19 $w\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ が対数的超函数，また $k_0\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ かつ $k_1\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ とする．$g(\lambda)$ は前命題 26 に与えられたものとしたとき

$$\begin{cases}f''(\lambda)-w^2f(\lambda)=g(\lambda) & (\lambda_1<\lambda<\lambda_2)^{1)},\\ f(0)=k_0,\quad f'(0)=k_1\end{cases}\tag{8}$$

の解 $f(\lambda)$ は一意的に定まり，それは次の公式

$$f(\lambda)=f_0(\lambda)+a\exp(-\lambda w)+b\exp(\lambda w)\tag{9}$$

で与えられる．ここに

$$\begin{cases}a=\dfrac{k_0}{2}-\dfrac{k_1}{2w}-\dfrac{f_0(0)}{2}+\dfrac{f_0'(0)}{2w}\\[2ex] b=\dfrac{k_0}{2}+\dfrac{k_1}{2w}-\dfrac{f_0(0)}{2}-\dfrac{f_0'(0)}{2w}\end{cases}\tag{9$'$}$$

証明 $f_0(\lambda)$ が (7) の解であり，また $a\exp(-\lambda w)$ も $b\exp(\lambda w)$ もともに

$$z''(\lambda)-\lambda^2z(\lambda)=0$$

の解であるから (9) に与えられた $f(\lambda)$ が (8) の

$$f''(\lambda)-w^2f(\lambda)=g(\lambda)$$

の解であることは明らか．そして

1) 命題 12 においてのように $\lambda_1<0<\lambda_2$ としておく．

$$f(0) = f_0(0) + \frac{k_0}{2} - \frac{k_1}{2w} - \frac{f_0(0)}{2} + \frac{f_0'(0)}{2w}$$

$$+ \frac{k_0}{2} + \frac{k_1}{2w} - \frac{f_0(0)}{2} - \frac{f_0'(0)}{2w} = k_0$$

$$f'(0) = f_0'(0) - \frac{k_0 w}{2} + \frac{k_1}{2} + \frac{f_0(0)w}{2} - \frac{f_0'(0)}{2}$$

$$+ \frac{k_0 w}{2} + \frac{k_1}{2} - \frac{f_0(0)w}{2} - \frac{f_0'(0)}{2} = k_1$$

最後に，(8)の別な解 $\tilde{f}$ があったとすると，$\hat{f}(\lambda) = f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)$ は

(10)
$$\hat{f}''(\lambda) - w^2 \hat{f}(\lambda) = 0, \ \hat{f}(0) = 0, \ \hat{f}'(0) = 0$$

を満足する．ところが命題25の示すように，(10)の解は一意的に定まる．そして $\hat{f}(\lambda) \equiv 0$ はたしかに(10)の解になるから $\hat{f} = 0$ で $f(\lambda) \equiv \tilde{f}(\lambda)$ という矛盾に導かれるので，f より別の解はない．▍

註　結局超函数解を求める為には，右辺 $g(\lambda)$ のある方程式(7)の任意の解((6)とは限らない)を一つ求めればよい．ところで，もし $g(\lambda)$ が λ の多項式である場合には，直接 $f_0(\lambda)$ を求め得る場合がある．

例　$y''(\lambda) - s^2 y(\lambda) = s(\lambda^3 + 1)$

$$y_0(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda^3 \qquad (\alpha_0, \cdots, \alpha_3 \text{ は } \in \mathcal{C}/\mathcal{C})$$

として上の方程式に入れると

$$(2\alpha_2 + 6\alpha_3\lambda) - s^2(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda^3) = s(\lambda^3 + 1)$$

両辺の λ^k の係数$(k = 0, 1, 2, 3)$を等しいとおいて

$$2\alpha_2 - s^2\alpha_0 = s \cdot 1 = I, \ 6\alpha_3 - s^2\alpha_1 = 0, \ -s^2\alpha_2 = 0, \ -s^2\alpha_3 = s$$

ゆえに

$$\alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = \frac{-I}{s}, \ \alpha_0 = \frac{-I}{s^2}, \ \alpha_1 = \frac{6\alpha_3}{s^2} = \frac{-6I}{s^3}$$

を得て

$$y_0(\lambda) = \frac{-I}{s^2} + \frac{-6\lambda I}{s^3} + \frac{-\lambda^3 I}{s} = \{-t - 3t^2\lambda - \lambda^3\}$$

演 習 問 題

1. $y''(\lambda)-s^2y(\lambda)=s\lambda^3$ の解を一つ求む.

2. $y''(\lambda)-s^2y(\lambda)=s\lambda^4$ の解を一つ求む.

§29 絃の振動

長さ λ_0 の絃が λ 軸に沿って点0から点 λ_0 まで張られたとしよう. 絃の座標 λ である点の, 時刻 t における(静止の位置すなわち λ 軸からの)変位を示す函数 $z(\lambda,t)$ はさきに述べたように

$$z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)=\alpha^2z_{tt}(\lambda,t) \tag{11}$$

を満足する. ここに正の定数 α は $\alpha=\left(\dfrac{\rho}{P}\right)^{1/2}$ で, P は絃の張力, ρ は絃の単位長さの質量である.

時刻 $t=0$ において絃は λ 軸に一致し, その各点は速度をもたないと仮定する[1]と

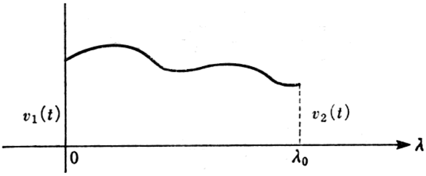
$$z(\lambda,0)=0,\ \ z_t(\lambda,0)=0 \qquad (0\leqq\lambda\leqq\lambda_0) \tag{12}$$

ということになるから(11)は, $z(\lambda)=\{z(\lambda,(t)\}$ に対する超函数微分方程式

$$z''(\lambda)=\alpha^2s^2z(\lambda) \qquad (\alpha \text{ は正定数}) \tag{13}$$

となる.

さらに絃の左端 $\lambda=0$ は λ 軸に垂直な方向に動き, その運動は函数 $v_1(t)$ によって与えられ, また絃の右端 $\lambda=\lambda_0$ の λ 軸に垂直な方向への運動は函数 $v_2(t)$



1) (12)が時刻 $t=0$ における初期条件である.

によって与えられるものとしよう．すなわち[1)]

$$z(0,t)=v_1(t),\ \ z(\lambda_0,t)=v_2(t)\qquad (0\leqq t<+\infty) \tag{14}$$

ゆえに(13)を

$$z(0)=v_1\in\mathcal{C}\subseteqq\mathcal{C}/\mathcal{C},\ \ z(\lambda_0)=v_2\in\mathcal{C}\subseteqq\mathcal{C}/\mathcal{C} \tag{15}$$

という条件のもとに解くことになった．

命題27　条件(15)のもとにおける超函数微分方程式(13)の解 $z(\lambda)$ は一意的に定まり

$$\begin{cases} z(\lambda)=\dfrac{e^{-\alpha\lambda s}-e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)s}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0 s}}v_1 \\ \qquad +\dfrac{e^{-\alpha(\lambda_0-\lambda)s}-e^{-\alpha(\lambda_0+\lambda)s}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0 s}}v_2 \end{cases}\qquad (0\leqq\lambda\leqq\lambda_0) \tag{16}$$

で与えられる．この右辺第1項を $z_1(\lambda)$，第2項を $z_2(\lambda)$ とおくと，$z_1(\lambda), z_2(\lambda)$ ともに(13)を満足しかつそれぞれ

$$z_1(0)=v_1,\ \ z_1(\lambda_0)=0;$$
$$z_2(0)=0,\ \ z_2(\lambda_0)=v_2$$

によって定義された運動である．$z_1(\lambda)$ は終点 $\lambda=\lambda_0$ が λ 軸に固定された運動，また $z_2(\lambda)$ は始点 $\lambda=0$ が λ 軸に固定された運動である．

証明　(13)の2つの解 $e^{\alpha\lambda s}=e^{\lambda\alpha s}$ と $e^{-\alpha\lambda s}=e^{-\lambda\alpha s}$ の，$a\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ と $b\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ とによる一次結合

$$ae^{\alpha\lambda s}+be^{-\alpha\lambda s}=z(\lambda)$$

が(15)を満足するという条件は

$$\begin{cases} z(0)=v_1=a+b, \\ z(\lambda_0)=v_2=ae^{\alpha\lambda_0 s}+be^{-\alpha\lambda_0 s} \end{cases} \tag{17}$$

で，これらから a, b を解くと[2)]

$$\begin{cases} a=\dfrac{-e^{-2\alpha\lambda_0 s}v_1+e^{-\alpha\lambda_0 s}v_2}{I-e^{-2\alpha\lambda_0 s}}, \\ b=\dfrac{v_1-e^{-2\alpha\lambda_0 s}v_2}{I-e^{-2\alpha\lambda_0 s}} \end{cases} \tag{18}$$

---

1)　$z(\lambda,t)$ について，$\lambda=0$ および $\lambda=\lambda_0$ における境界条件が(14)なのである．
2)　$(I-e^{-2\alpha\lambda_0 s})^{-1}$ の存在とその意味については§23の(40)を見よ．

となるので，これらの a,b による一次結合 $z(\lambda)=ae^{\alpha\lambda s}+be^{-\alpha\lambda s}$ は(16)となり，この(16)は(13)と(14)を満足する解である．

この解の一意性の証明は次の通り．a,b が(18)で確定したから

$$(ae^{\alpha\lambda s}+be^{-\alpha\lambda s})_{\lambda=0} = a+b = k_0$$

$$(ae^{\alpha\lambda s}+be^{-\alpha\lambda s})'_{\lambda=0} = a\alpha s-b\alpha s = k_1$$

とした k_0, k_1 は確定する．よって，$z(\lambda)=ae^{\alpha\lambda s}+be^{\alpha\lambda s}$ は

$$z''(\lambda)-\alpha^2s^2z(\lambda) = 0,\ \ z(0) = k_0,\ \ z'(0) = k_1$$

の一意解として確定する(命題 25 をみよ)．∎

解(16)の解釈　上述のように(16)の解 $z(\lambda)$ は二つの解 $z_1(\lambda)$ と $z_2(\lambda)$ の和になっている．

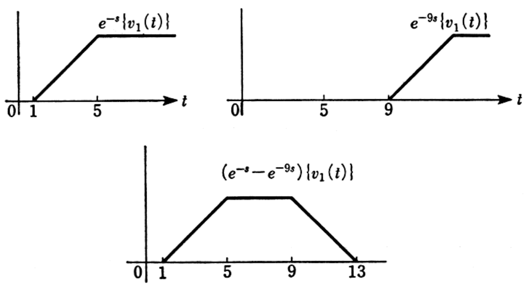
$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} z_1(\lambda) = \dfrac{e^{-\alpha\lambda s}-e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)s}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0 s}}v_1, \\ z_2(\lambda) = \dfrac{e^{-\alpha(\lambda_0-\lambda)s}-e^{-\alpha(\lambda_0+\lambda)s}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0 s}}v_2 \end{cases} \qquad (0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)$$

解釈 1　絃上の点 λ が時刻 t の変化するにつれてどう変化するか．これを，$z_1(\lambda)$ について

$$\text{(20)} \qquad \alpha = \frac{1}{2}, \lambda_0 = 10 \quad \text{かつ} \quad v_1(t) = \begin{cases} t, 0\leqq t<4 \\ 4, 4\leqq t<\infty \end{cases}$$

のときに，$\lambda=2$ として

$$\text{(21)} \qquad z_1(2) = \frac{e^{-s}-e^{-9s}}{I-e^{-10s}}v_1$$



から読んでみよう．e^{-sv_1} のグラフは，v_1 のグラフを右に1だけ推移させたものだから[1]，$e^{-s}\{v_1(t)\}$ のグラフ，$e^{-9s}\{v_1(t)\}$ のグラフおよび $e^{-s}\{v_1(t)\}-e^{-9s}\{v_1(t)\}$ のグラフは前頁の図のようになる．

そして$(I-e^{-10s})=I+e^{-10s}+e^{-20s}+e^{-30s}+\cdots$であるから，

$$z_1(2)=(I+e^{-10s}+e^{-20s}+e^{-30s}+\cdots)(e^{-s}-e^{-9s})v_1$$

のグラフは，上の$(e^{-s}-e^{-9s})\{v_1(t)\}$ のグラフに，このグラフを右に10だけ推移させたもの，右に20だけ推移させたもの，…を順次に加えていったものになる．すなわち $z_1(2)$ のグラフは次のようになる[2]．



解釈2　任意に時刻を t_0 と固定した瞬間 t_0 における絃の形状を知りたい．その為に，上と同じく $\alpha=\dfrac{1}{2}, \lambda_0=10$ および $v_1(t)$ を(20)で与えられた場合を扱ってみよう．そうすると，(20)のもとには

$$\begin{aligned}z_1(\lambda)&=(I+e^{-10s}+e^{-20s}+e^{-30s}+\cdots)\times\\&\qquad\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda s\right)-\exp\left(-\left(10-\frac{\lambda}{2}s\right)\right)\right)v_1\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\exp\left(-\left(10n+\frac{1}{2}\lambda\right)s\right)-\exp\left(-\left(10n+10-\frac{\lambda}{2}\right)s\right)\right\}v_1\end{aligned}$$

となる．加法定理(§22の(30)′)

$$\exp(\lambda s)\exp(\mu s)=\exp((\lambda+\mu)s)$$

を用いたのである．

上の $z_1(\lambda)$ で与えられる絃の形状を，或る瞬間$\underline{t=t_0<10}$において調べるとい

---

1)　§18を見よ．

2)　$z_1(\lambda)=z_1(\lambda,t)$ は，$z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)=\alpha^2 z_{tt}(\lambda,t)$ の**超函数解**であるので，$v_1(t)$ が十分に滑らかでないと $z_1(2,t)$のグラフに角(カド)があってもあたりまえなのである．なお $z_2(2)=\dfrac{e^{-4s}-e^{-6s}}{I-e^{-10s}}v_2$ については読者これを調べられたし．

う問題を考えよう．このときには，推移オペレイターの性質(§18の(4))から，上の無限級数の中で s の係数が10より大きい項は影響しない．それらは $0\leqq t<10$ では0に等しい函数を表わすからである．

したがって，$t_0<10$ において $z_1(\lambda)$ を調べる為には函数

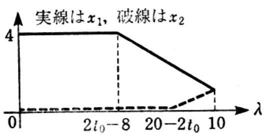
$$\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda s\right)-\exp\left(-\left(10-\frac{1}{2}\lambda\right)s\right)\right]\{v_1(t)\}=x_1(\lambda,t)-x_2(\lambda,t)$$

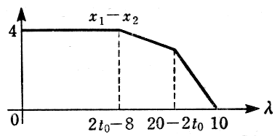
を調べるとよい．ところが推移オペレイターの性質(§18の(4))から

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda s\right)\{v_1(t)\}=\begin{cases}0 & \left(0\leqq t<\dfrac{1}{2}\lambda\right)\\ t-\dfrac{1}{2}\lambda & \left(\dfrac{1}{2}\lambda\leqq t<\dfrac{1}{2}\lambda+4\right)\\ 4 & \left(\dfrac{1}{2}\lambda+4\leqq t\right)\end{cases}$$

$$\exp\left(-\left(10-\frac{1}{2}\lambda\right)s\right)\{v_1(t)\}=\begin{cases}0 & \left(0\leqq t<10-\dfrac{1}{2}\lambda\right)\\ t-10+\dfrac{1}{2}\lambda & \left(10-\dfrac{1}{2}\lambda\leqq t<14-\dfrac{\lambda}{2}\right)\\ 4 & \left(14-\dfrac{1}{2}\lambda\leqq t\right)\end{cases}$$

を得る．これから $t_0, \lambda_0=10$ における $z_1(\lambda)$ のグラフは図のようになる[1]．





§30　D'Alembert の方法，初期形状が与えられた絃の振動

絃が両端 $\lambda=0$ と $\lambda=\lambda_0$ において固定され：

(22)　　　　$z(0,t)=0,\ \ z(\lambda_0,t)=0\qquad(0\leqq t<\infty)$

かつ初期の $t=0$ における絃の形状 $z(\lambda,0)$ が実数値連続函数 $\varphi(\lambda)$ によって

(23)　　　　$z(\lambda,0)=\varphi(\lambda)\qquad(0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)$

の如く与えられた絃の振動を調べる．

1)　読者は $z_2(\lambda)$ の $t=t_0<10$ におけるグラフをえがいて見られよ．

D'Alembert(1717–1783)が示唆した

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)=\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)=\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)$$

を生かした次の命題から出発しよう.

命題 28

(24)
$$z_1(\lambda)=\{z_1(\lambda,t)\}=\left\{\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)\right\}$$

は，超函数的に λ について微分すると，

(25)
$$z_1'(\lambda)=\alpha s z_1(\lambda)-\alpha[\varphi(\lambda)]^{1)}$$

証明　$z_1(\lambda)=s\left\{\int_0^t\varphi\left(\lambda+\frac{\tau}{\alpha}\right)d\tau\right\}=s\left\{\int_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda+t}\varphi\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)d\tau\right\}$

であるから

$$z_1'(\lambda)=s\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda+t}\varphi\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)d\tau\right\}=\alpha s\left\{\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)-\varphi(\lambda)\right\}$$
$$=\alpha s z_1(\lambda)-\alpha[\varphi(\lambda)]$$

系 1

(24)′
$$z_2(\lambda)=\{z_2(\lambda,t)\}=\left\{\varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)\right\}$$

に対して，

(25)′
$$z_2'(\lambda)=-\alpha s z_2(\lambda)+\alpha[\varphi(\lambda)]$$

系 2

(26)
$$z(\lambda)=\frac{1}{2}(z_1(\lambda)+z_2(\lambda))=\frac{1}{2}\left\{\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)+\varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)\right\}$$

に対して，次の超函数方程式が成り立つ.

(27)
$$z''(\lambda)=\alpha^2s^2z(\lambda)-\alpha^2s[\varphi(\lambda)]\qquad(0\leqq\lambda\leqq\lambda_1)$$

証明　$z'(\lambda)=\frac{1}{2}(z_1'(\lambda)+z_2'(\lambda))=\frac{1}{2}\alpha s(z_1(\lambda)-z_2(\lambda)).$

したがって

1)　$[\varphi(\lambda)]$ は $\varphi(\lambda)$ 倍オペレイター $s\varphi(\lambda)$ のことである(§5を見よ).

$$
\begin{aligned}
z''(\lambda) &= \frac{1}{2}\alpha s(z_1'(\lambda)-z_2'(\lambda)) \\
&= \frac{1}{2}\alpha^2 s^2(z_1(\lambda)+z_2(\lambda))-\frac{1}{2}2\alpha^2 s[\varphi(\lambda)] \\
&= \alpha^2 s^2 z(\lambda)-\alpha^2 s[\varphi(\lambda)]
\end{aligned}
$$

註 1 (24), (24)′ および (26) によって，$z(\lambda,0)=\varphi(\lambda)$ であるが，もし $z(\lambda,t)$ が t に関して 2 回連続微分可能ならば

$$s^2 z(\lambda,t) = z_{tt}(\lambda,t)+z_t(\lambda,0)+sz(\lambda,0)$$

であるから，(26) に与えられる $z(\lambda)$ は，$z(\lambda,0)=\varphi(\lambda), z_t(\lambda,0)=0$ という $t=0$ での初期条件に対する絃の振動の方程式 $z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)=\alpha^2 z_{tt}(\lambda,t)$ の超函数解と考えられる.

註 2 (26) の $z(\lambda)=\{z(\lambda,t)\}=\dfrac{1}{2}\left\{\varphi\left(\lambda+\dfrac{t}{\alpha}\right)+\varphi\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が，絃の両端 $\lambda=0$，$\lambda=\lambda_0$ における**境界条件** (22) を満足する条件を書き下すと次のようになる．すなわち

$$
(28)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\left(\varphi\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)+\varphi\left(\dfrac{-t}{\alpha}\right)\right\} = 0, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(\varphi\left(\lambda_0+\dfrac{t}{\alpha}\right)+\varphi\left(\lambda_0-\dfrac{t}{\alpha}\right)\right) = 0
\end{cases}
\qquad (0\leqq t<+\infty)
$$

これが成り立つ為には

$$(29)\qquad -\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda+2\lambda_0)$$

すなわち $\varphi(\lambda)$ はすべての実数 λ で定義された奇函数で $2\lambda_0$ を周期とする周期函数であればよい[1].

そのような実数値連続函数 $\varphi(\lambda)$ を任意にとれば，これによって作った $z(\lambda)$ ——(24), (24)′ および (26) から作った $z(\lambda)$——は，(22), (23) を満足する (27) の超函数解である.

註 3 (27) の超函数解 $\hat{z}(\lambda)$ で境界条件 (22) すなわち $\hat{z}(0)=0$，$\hat{z}(\lambda_0)=0$ を満足するものは，上の

1) たとえば $\varphi(\lambda)=\sin \pi\lambda/\lambda_0$

$$z(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)+\varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)\right\}$$

以外にない．もしこの $z(\lambda)$ と異なる解 $\hat{z}(\lambda)$ があったとすると，

$$\tilde{z}(\lambda) = z(\lambda)-\hat{z}(\lambda)$$

は，

(27)′ $$\tilde{z}''(\lambda) = \alpha^2 s^2 \tilde{z}(\lambda),\ \ \tilde{z}(0) = 0,\ \ \tilde{z}(\lambda_0) = 0$$

の解になる．ところが，命題 25 に示したように § 28 の λ-初期値問題

$$f''(\lambda)-w^2 f(\lambda) = 0,\ \ f(0) = k_0,\ \ f'(0) = k_1$$

の解 $f(\lambda)$ は唯一つしかない．だから $w^2=\alpha^2 s^2$ および $k_0=0$，$k_1=0$ として，(27)′ の解 $\tilde{z}(\lambda)=0$ は (27)′ の一意解に他ならないことがわかった．ゆえに $z(\lambda)=\hat{z}(\lambda)$ となって，$\hat{z}(\lambda)$ が $z(\lambda)$ と異なるという仮定は誤りであった．▎

与えられた初期速度をもつ絃の振動も次のように取扱える．すなわち**初期条件**

$$z(\lambda, 0) = 0,\ \ z_t(\lambda, 0) = \phi(\lambda) \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0),$$

と**境界条件**

$$z(0, t) = 0,\ \ z(\lambda_0, t) = 0 \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

とで与えられた場合の絃の振動を決定したい．

このときは，**超函数方程式**は

(30) $$z''(\lambda) = \alpha^2 s^2 z(\lambda)-\alpha^2[\phi(\lambda)]$$

となり，初期および境界における条件は

(31)$_1$ $$z(\lambda, 0) = 0,\ \ z_t(\lambda, 0) = \phi(\lambda)$$

(31)$_2$ $$z(0) = 0,\ \ z(\lambda_0) = 0$$

よってもし $z(\lambda)=\{z(\lambda, t)\}$ が (30) − (31)$_2$ を満足するならば，$y(\lambda)=sz(\lambda)$ は

(30)′ $$y''(\lambda) = \alpha^2 s^2 y(\lambda)-\alpha^2 s[\phi(\lambda)],\ \ y(0) = y(\lambda_0) = 0$$

を満足する．

ゆえに命題 28 のときと同じく

$$y(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\phi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)+\phi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)\right\}$$

したがって $z(\lambda)=hy(\lambda)$ から(30)−$(31)_2$ を満足する超函数の一意解の**候補者**

$$(32)\qquad z(\lambda)=\{z(\lambda,t)\}=\frac{1}{2}\left\{\int_0^t\left(\psi\left(\lambda+\frac{\tau}{\alpha}\right)+\psi\left(\lambda-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)d\tau\right\}$$

が得られた．この $z(\lambda)$ が**境界条件** $(31)_2$ を満足する為には $\psi(\lambda)$ はすべての実数で定義されかつ次の条件を満足しなければならない

$$(29)'\qquad -\psi(-\lambda)=\psi(\lambda)=\psi(\lambda+2\lambda_0)$$

勿論，(32)の $z(\lambda)$ が初期条件 $(31)_1$ を満足していることは明らかである．

D'Alembert の波動公式　以上から次のことがいえる．$-\infty<\lambda<\infty$ において，$\varphi(\lambda)$ が2回連続微分可能，$\psi(\lambda)$ が1回連続微分可能で φ が(29)をまた ψ が(29)′を満たすならば，いわゆる D'Alembert の波動公式

$$z(\lambda,t)=\frac{1}{2}\left\{\varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)+\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)+\alpha\int_{\lambda-t/\alpha}^{\lambda+t/\alpha}\psi(u)du\right\}$$

によって与えられた $z(\lambda,t)$ が

$$z_{\lambda\lambda}(\lambda t)=\alpha^2z_{tt}(\lambda,t);\ z(\lambda,0)=\varphi(\lambda),\ \ z_t(\lambda,0)=\psi(\lambda)$$

の解である．

応用例 1　$\varphi(\lambda)=\sin\dfrac{\pi}{\lambda_0}\lambda$ のときは

$$\begin{cases}z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)=\alpha^2z_{tt}(\lambda,t),\\ z(0,t)=0,\ \ z(\lambda_0,t)=0,\ \ z(\lambda,0)=\varphi(\lambda),\ \ z_t(\lambda,0)=0\end{cases}$$

の解は

$$\begin{aligned}z(\lambda,t)&=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right)\right)\right\}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{t}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\lambda\right)\end{aligned}$$

で与えられる．

応用例 2　$\psi(\lambda)=\sin\dfrac{\pi}{\lambda_0}\lambda$ のときは

$$\begin{cases}z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)=\alpha^2z_{tt}(\lambda,t),\\ z(0,t)=0,\ \ z(\lambda_0,t)=0,\ \ z(\lambda,0)=0,\ \ z_t(\lambda,0)=\psi(\lambda)\end{cases}$$

の解は

$$z(\lambda,t)=\frac{\alpha}{2}\left\{\int_0^t\left(\psi\left(\lambda+\frac{\tau}{\alpha}\right)+\psi\left(\lambda-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)d\tau\right.$$

$$= \sin\frac{\pi\lambda}{\lambda_0}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{\tau}{\alpha}\right)d\tau$$

$$= \frac{\alpha\lambda_0}{\pi}\sin\frac{\pi\lambda}{\lambda_0}\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{t}{\alpha}\right)$$

註　以上から，18世紀の数学者 D'Alembert(1717–1783)を超函数概念の源流の一人という人もあるのである．

§31　無限に長い絃の振動

§29の

$$(19)' \qquad z_1(\lambda) = \frac{e^{-\alpha\lambda s} - e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)s}}{I - e^{-2\alpha\lambda_0 s}}v_1 \qquad (\alpha > 0)$$

において $\lambda_0 \to \infty$ としたものを考察する．すなわち，まず $z_1(\lambda) = \{z_1(\lambda, t)\}$ は

$$\begin{cases} \text{初期条件 } z_1(\lambda, 0) = 0,\ (z_1)_t(\lambda, 0) = 0 & (0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0) \\ \text{境界条件 } z_1(0, t) = \{v_1(t)\},\ z_1(\lambda_0, t) = 0 & (0 \leqq t) \end{cases}$$

のもとに超函数微分方程式

$$(13)' \qquad z_1''(\lambda) = \alpha^2 s^2 z_1(\lambda) \qquad (\alpha \text{ は正の定数})$$

の解として一意的に定まったものであった．この $z_1(\lambda)$ を，$0 \leqq t < \alpha\lambda_0$ において考察してみる．

まず

$$\begin{cases} z_1(\lambda) = e^{-\alpha\lambda s}v_1 + r(\lambda)v_1, \\ r(\lambda)v_1 = \dfrac{e^{-\alpha(2\lambda_0+\lambda)s}v_1 - e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)s}v_1}{I - e^{-2\alpha\lambda_0 s}} \end{cases}$$

と分解する．この $r(\lambda)v_1$ の分子のなかの

$$e^{-\alpha(2\lambda_0+\lambda)s}\{v_1(t)\} \quad \text{も} \quad e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)s}\{v_1(t)\} \quad \text{も}$$

双方が

$$(33) \qquad 0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0,\ 0 \leqq t < \alpha\lambda_0$$

においては，推移オペレイターの性質(§18の(4)′)を用いると0になることがわかる．(33)において

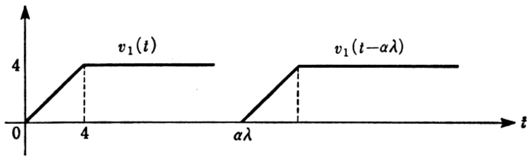
$$\alpha(2\lambda_0 + \lambda) > t,\ \alpha(2\lambda_0 - \lambda) > t$$

となるからである．

ゆえに(33)において $z_1(\lambda)$ を考察するときには，$r(\lambda)\{v_1(t)\}=0$ としてよい．すなわち $0\leqq\lambda\leqq\lambda_0$，$0\leqq t<\alpha\lambda_0$ においては

$$(19)'' \qquad z_1(\lambda)=e^{-\alpha\lambda s}\{v_1(t)\}=\begin{cases}0, & 0\leqq t<\alpha\lambda\\ v_1(t-\alpha\lambda), & 0\leqq\alpha\lambda<t\end{cases}$$

であるとしてよい．これから次のことがわかる．$z_1(\lambda)=\{z_1(\lambda,t)\}$ は，絃の点 λ が時刻 t において静止の位置から垂直方向に変位した大きさを表わしている．だから $v_1(t)$ が§29に与えたようになっていたとするとき，$z_1(0,t)=v_1(t)$，$z_1(\lambda,t)=e^{-\alpha\lambda s}v_1(t)$ のグラフは，下の図のようになる．ゆえに，絃の始点 $\lambda=0$



から伝わって行く波について，時刻 t における波の尖点は $\lambda=\dfrac{t}{\alpha}$ である．すなわち波は速度 $\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{P/\rho}$ で動いてゆくわけである．

これが無限に長い絃の振動である．無限に長い絃という意味の解釈を与えたわけである．

第8章　電信方程式

§32　電信方程式の超函数方程式

λ 軸に沿って伸びる長距離送電線路――ケーブル――の電圧，電流の特性を考察する．このケーブルの座標 λ の点での時刻 t における電圧 $U(\lambda, t)$ と電流 $I(\lambda, t)$ との間には次の関係式が成り立つ．

(1) $$U_\lambda = -LI_t - RI,\ \ I_\lambda = -CU_t - GU$$

ここで R は**抵抗**(resistance)，L は自己**インダクタンス**(inductance)，G は**漏電コンダクタンス**または**リーク**(leak)，C は**容量**(capacity)と呼ばれ，いずれもケーブルの単位長さについてのものとする．

時刻 $t=0$ では，ケーブルに電流が流れず，電圧はいたるところ0に等しいと仮定する．すなわち，すべての λ で

(2) $$U(\lambda, 0) = 0,\ \ I(\lambda, 0) = 0.$$

このことから，すべての λ で

$$U_t(\lambda) = sU(\lambda),\ \ I_t(\lambda) = sI(\lambda)$$

したがって

(1)′ $$\begin{cases} U'(\lambda) = -LsI(\lambda) - RI(\lambda) = -(Ls+R)I(\lambda) \\ I'(\lambda) = -CsU(\lambda) - GU(\lambda) = -(Cs+G)U(\lambda) \end{cases}$$

ゆえに

$$U''(\lambda) = -(Ls+R)I'(\lambda) = (Ls+R)(Cs+G)U(\lambda)$$

すなわち電圧の満足すべき方程式を得た:

(3)
$$U''(\lambda) = (Ls+R)(Cs+G)U(\lambda)$$
$$= (LCs^2+(RC+LG)s+RG)U(\lambda)$$

これを**電信方程式**(telegraphist's equation)という．電流についても全く同じ形の方程式：

(3)′
$$I''(\lambda) = (Cs+G)(Ls+R)I(\lambda)$$
$$= (LCs^2+(RC+LG)s+RG)I(\lambda)$$

を得る．

註 $LC=\alpha^2$，$(RC+LG)=0$，$RG=0$ のときが，絃の振動の微分方程式にあたり，$LC=0$，$(RC+LG)=\alpha^2$，$RG=0$ のときが熱方程式にあたる．

以下 L, C, G, R という定数の間の関係にしたがって，電信方程式(3)または(3)′の解の具体的表現を示す．これによって，Laplace 変換を用いないでも，第1部，第2部で準備した演算子法における超函数の計算で解の表現が出来ることがわかるのである．

§33 無損失ケーブル

$R=G=0$ かつ $L>0$，$C>0$ の場合で電信方程式は

(4)
$$U''(\lambda) = LCs^2U(\lambda) \qquad (L>0,\ C>0)$$

である．ケーブルが非常に長いとし，ケーブルの始点 $\lambda=0$ に起電力 $E=\{E(t)\}$ が加えられたときに，(4)を $\lambda=0$ と $\lambda=\lambda_0$ における境界条件

(5)
$$U(0) = E = \{E(t)\},\ U(\lambda_0) = 0$$

で解くことになる．ゆえに，§31 の無限に長い絃の振動において $\alpha^2=LC$ とおいて

(6)
$$U(\lambda) = \exp(-\sqrt{LC}\lambda s)\{E(t)\}$$

すなわち，次のようになる．

(7)
$$U(\lambda, t) = \left\{\begin{matrix} 0,\ \ 0 \leqq t < \sqrt{LC}\lambda \\ E(t-\sqrt{LC}\lambda),\ \ 0 \leqq \sqrt{LC}\lambda < t \end{matrix}\right\}$$

この場合，電圧の波は速度 $1/\sqrt{LC}$ で動く．

同じようにして電流の強さも(1)′と(6)とから

$$I(\lambda) = -\frac{I}{Ls}U'(\lambda) = \sqrt{C/L}\exp(-\sqrt{LC}\lambda s)\{E(t)\},$$

(8) $$I(\lambda, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq t < \sqrt{LC}\lambda \\ \sqrt{C/L}\,E(t-\sqrt{LC}\lambda), & 0 \leqq \sqrt{LC}\lambda < t \end{cases}$$

註　表題に**無損失**(loss がない)というのは，$R=G=0$ ならば，(1)が

$$U_\lambda = -LI_t,\ I_\lambda = -CU_t$$

となって(1)のときよりも U_λ や I_λ が増加するからであろう．

§34　無ひずみケーブル

$R/L=G/C$ かつ $L>0$，$C>0$ の場合で，電信方程式は

(9) $$U''(\lambda) = (\alpha s+\beta)^2 U(\lambda) \qquad (\alpha=\sqrt{LC},\ \beta=\sqrt{RG})$$

となる．前のように

$$U(0) = E = \{E(t)\},\ U(\lambda_0) = 0$$

とした場合には，ケーブルが非常に長いと仮定すると，§31 と同じようにして解は

(10) $$U(\lambda) = \{U(\lambda, t)\} = \exp(-(\alpha s+\beta)\lambda)\{E(t)\}$$

で与えられることがわかる．その

証明　(9)の二つの解

$$e^{(\alpha s+\beta)\lambda} \quad と \quad e^{-(\alpha s+\beta)\lambda} \quad との$$

一次結合

$$U(\lambda) = ae^{(\alpha s+\beta)\lambda} + be^{-(\alpha s+\beta)\lambda} \qquad (a, b \in \mathcal{C}/\mathcal{C})$$

が，ケーブルの両端 $\lambda=0$ と $\lambda=\lambda_0$ における境界条件 $U(0)=E=\{E(t)\}$，$U(\lambda_0)=0$ を満足するように，

$$a+b = E = \{E(t)\},\ ae^{(\alpha s+\beta)\lambda_0} + be^{-(\alpha s+\beta)\lambda_0} = 0$$

から a, b を求めると，§31 のときと同じように

$$a = \frac{-e^{-2(\alpha s+\beta)\lambda_0}\cdot E}{I-e^{-2(\alpha s+\beta)\lambda_0}},\ b = \frac{E}{I-e^{-2(\alpha s+\beta)\lambda_0}}$$

が得られて

$$U(\lambda)=\frac{e^{-(\alpha s+\beta)\lambda}\cdot E-e^{-(\alpha s+\beta)(2\lambda_0-\lambda)}\cdot E}{I-e^{-2(\alpha s+\beta)\lambda_0}}$$

$$=e^{-(\alpha s+\beta)\lambda}\cdot E+r(\lambda)\cdot E,$$

$$r(\lambda)E=\frac{e^{-(\alpha s+\beta)(2\lambda_0+\lambda)}\cdot E-e^{-(\alpha s+\beta)(2\lambda_0-\lambda)}\cdot E}{I-e^{-2(\alpha s+\beta)\lambda_0}}$$

となる.

この $r(\lambda)E=r(\lambda)\{E(t)\}$ の分子のなかの

$$e^{-\beta(2\lambda_0+\lambda)}\cdot e^{-\alpha(2\lambda_0+\lambda)s}\{E(t)\},$$

$$e^{-\beta(2\lambda_0-\lambda)}\cdot e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)s}\{E(t)\}$$

はいずれも

$$0\leqq\lambda\leqq\lambda_0,\ \ 0\leqq t<\alpha\lambda_0$$

においては，推移オペレイター $e^{-\mu s}$ の性質(§18の(4)′)を用いると0になることがわかる．上の範囲で

$$\alpha(2\lambda_0+\lambda)>t,\ \ \alpha(2\lambda_0-\lambda)>t$$

となるからである.

よって $U(0)=E$, $U(\lambda_0)=0$ として $\lambda_0\to\infty$ にしたときには，上の $r(\lambda)E$ は0と考えても差し支えないので(10)と考えてよい. ▌

したがって $R/L=G/C$ かつ $L>0$, $C>0$ の場合にケーブルが非常に長いと仮定すると，(9)と(10)とにより解

$$U(\lambda)=\{U(\lambda,t)\}=e^{-(\alpha s+\beta)\lambda}\{E(t)\}$$

は

$$U(\lambda,t)=\begin{cases}0, & 0\leqq t<\sqrt{LC}\lambda\\ e^{-\lambda\sqrt{RG}}E(t-\sqrt{LC}\lambda), & 0\leqq\sqrt{LC}\lambda<t\end{cases}\tag{11}$$

で与えられ，また(1)′を用いて(10)により

$$I(\lambda)=-\frac{U'(\lambda)}{Ls+R}=\frac{\alpha s+\beta}{Ls+R}e^{-(\alpha s+\beta)\lambda}\{E(t)\}$$

$$=\sqrt{C/L}\,e^{-(\alpha s+\beta)\lambda}\{E(t)\}$$

である. $R/L=G/C$ によって

$$(Ls+R)\sqrt{C/L} = \sqrt{LC}s+\sqrt{RG} = \alpha s+\beta$$

となるからである.

こうして

$$(12) \qquad I(\lambda,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq t < \sqrt{LC}\,\lambda \\ \sqrt{C/L}\,e^{-\sqrt{RG}\,\lambda}E(t-\sqrt{LC}\,\lambda, & 0 \leqq \sqrt{CL}\,\lambda < t \end{cases}$$

註　この§35の場合は，無損失の場合に似てはいるが，波の進行につれてすなわちλが大きくなるにつれて，波の振幅$e^{-\sqrt{RG}\,\lambda}$がλの指数函数的に減衰する．しかし波形には変りがない．これが無損失の場合との違いで無ひずみケーブルと呼ばれる理由であろう．この違いを最初に指摘したのはHeavisideであるということである.

§35　Thomson ケーブル

$L=G=0$かつ$R>0$，$C>0$の場合．この仮定のもとに，19世紀の半ばにWilliam Thomson (後のLord Kelvin)[1]が，大西洋を横断する海底ケーブルの電流の伝わり方を，実用上の目的に適する十分な精度で計算したという.

上の場合の電信方程式は

$$(13) \qquad U''(\lambda) = RCsU(\lambda)$$

である．最初の時刻$t=0$での電圧を0すなわち

$$(14) \qquad U(\lambda,0) = 0 \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0)$$

とする．λ_0はこのケーブルの長さである．そしてケーブルの両端に働く起電力は一定で

$$(15) \qquad U(0,t) = E = \{E_0\},\ U(\lambda_0,t) = 0 \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

であるとしておく.

すなわち$\sqrt{RC}=\alpha>0$とおくと(13)は**熱方程式**

$$U_{\lambda\lambda}(\lambda,t) = \alpha^2 U_t(\lambda,t)$$

を(14)を用いた

1)　トムソン(ケルヴィン卿)(1824–1907)

$$sU(\lambda,t)-sU(\lambda,0)=U_t(\lambda,t)$$

で書き直したところの

(13)′ $$U''(\lambda)=\alpha^2 sU(\lambda)\qquad (\alpha=\sqrt{RC}>0)$$

になる．このようにして，次の章の大事な§すなわち(13)′を条件(14)と(15)のもとに解くという問題に直面することになった．こうして

命題29　(13)′−(14)−(15)を満たす超函数解は一意的に定まり，それは次の式で与えられる．

(16) $$U(\lambda)=\frac{(e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}-e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}})E}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}$$

証明　波動方程式のとき(§29)と同じようにしてやる．

まず，指数函数 $e^{\lambda w}$ で(13)′を満たすもの，すなわち

$$(e^{\lambda w})''=w^2e^{\lambda w}=\alpha^2 se^{\lambda w}$$

と $e^{\lambda w}\neq 0$ とから $w^2=\alpha^2 s$ すなわち

$$w=-\alpha\sqrt{s}\,,\ w=\alpha\sqrt{s}$$

が得られたから，任意の $a\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$，$b\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ に対して．命題23(§26)からわかるように

(17) $$U(\lambda)=ae^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda\sqrt{s}}$$

は(13)′の解になる．この a と b をうまく定めて上の $U(\lambda)$ が境界条件(15)を満足するように出来る．実際に，

(18) $$\begin{cases}U(0)=U(0,t)=a+b=E\\ U(\lambda_0)=U(\lambda_0,t)=ae^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}}=0\end{cases}$$

は解ける．すなわち

$$ae^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}}=Ee^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}},\ ae^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda_0 s}=0$$

から辺々相減じて

$$a(e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}}-e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}})=Ee^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}}$$

ゆえに

$$a=\frac{E}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}$$

同様にして $b=\dfrac{-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}E}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}$ も得られて，(16)が求められた.

<u>最後に解の一意性の証明</u>　この解 $U(\lambda)$ については，(16), (17), (18)からわかるように

$$U(0)=E$$

また(17)からわかるように

$$\begin{aligned} U'(0) &= -a\alpha\sqrt{s}+b\alpha\sqrt{s} \\ &= \frac{-E\alpha\sqrt{s}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}+\frac{-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}E\alpha\sqrt{s}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}} \end{aligned}$$

となって，$U(0)=k_0$，$U'(0)=k_1$ の k_0, k_1 が確定している．ところが(13)′ の解 $\hat{U}(\lambda)$ で $\lambda=0$ における条件 $\hat{U}(0)=k_0$, $\hat{U}'(0)=k_1$ を満足するものは一意的に定まることは，命題25(§28)において $w=-\alpha\sqrt{s}$ とおけばわかる[1)]. ❙

命題 30　(13)′ と(14), (15)を満足する一意解 $U(\lambda)=\{U(\lambda,t)\}$ の具体的表現は次の通りである．すなわち(16)から

$$U(\lambda)=E\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-\alpha(2\nu\lambda_0+\lambda)\sqrt{s}}-\sum_{\nu=1}^{\infty}e^{-\alpha(2\nu\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}}\right) \tag{19}$$

において $E=\{E_0\}$，$\alpha=\sqrt{RC}$ とおいたものである．したがって§25の(51)すなわち

$$\begin{cases} \exp(-\lambda s^{1/2})=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\lambda^2/4t)\right\} & (\lambda>0 \text{ のとき}) \\ \qquad\qquad\qquad =I \quad (\lambda=0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{20}$$

を使えば

$$\begin{cases} U(\lambda,t)=\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^t E(t-\tau)\frac{\alpha(2\nu\lambda_0+\lambda)}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\exp\left(-\frac{\alpha^2(2\nu\lambda_0+\lambda)^2}{4\tau}\right)d\tau \\ \qquad\qquad -\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^t E(t-\tau)\frac{\alpha(2\nu\lambda_0-\lambda)}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\exp\left(-\frac{\alpha^2(2\nu\lambda_0-\lambda)^2}{4\tau}\right)d\tau \end{cases} \tag{19'}$$

において，$E=\{E_0\}$，$\alpha=\sqrt{RC}$ とおいたものである.

註　上の無限級数が意味をもつ(収束する)こと，および(大西洋の海底横断のように)無限に長いケーブルのときにおける(19)′ の近似については次の§36に述べる.

1)　$(\sqrt{s})^2=s$ となることは§13の(20)式から明らか.

§36 無限に長い Thomson ケーブル

命題 31 $\lambda>0$ かつ $0<t<\infty$ のとき

$$f(\lambda,t)=\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\leqq f\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2}{6}\right)=\frac{3}{\lambda^2}\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}} \tag{21}$$

証明

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\lambda,t)=(\lambda^2-6t)\frac{\lambda}{8\sqrt{\pi t^7}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \tag{22}$$

だから，$f(\lambda,t)$ は $t=\lambda^2/6$ で極大になる．そして $\lim_{t\downarrow 0}f(\lambda,t)=0$, $\lim_{t\to\infty}f(\lambda,t)=0$ であるから，$\lambda>0$ に対して $f(\lambda,t)$ は $t=\lambda^2/6$ で最大値 $f\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2}{6}\right)$ をとる．

註 (21)は，超函数的に

$$e^{-\lambda\sqrt{s}}\leqq\left[\frac{3}{\lambda^2}\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}\right]h \tag{21$'$}$$

と書くことが出来る．左辺は $\left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\right\}$ という函数で与えられる超函数，右辺は定数値 $\frac{3}{\lambda^2}\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}$ をとる函数で与えられる超函数である．そしてこれら超函数を定義する函数の間に，すべての $t(0<t<\infty)$ で左辺の函数の値より右辺の函数の値の方が小さくないというのが(21)$'$ で，これは(21)を示しているわけである．

こうして前§35の(19)を考えれば，$0<\lambda\leqq\lambda_0$ のとき

$$\begin{cases}U(\lambda)=Ee^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}+r(\lambda),\\ r(\lambda)=E\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}(e^{-\alpha(2\nu\lambda_0+\lambda)\sqrt{s}}-e^{-\alpha(2\nu\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}})\right)\end{cases} \tag{22$'$}$$

となるが，(21)$'$ を用いると，t の函数 E の絶対値をとった函数を $|E|$ と書いて，$0<\lambda\leqq\lambda_0$ において

$$\begin{aligned}|r(\lambda)|&\leqq|E|*\left[3\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}\right]\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1/\alpha^2}{(2\nu\lambda_0+\lambda)^2}+\frac{1/\alpha^2}{(2\nu\lambda_0-\lambda)^2}\right\}\\ &\leqq\left[3\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}\frac{2}{\alpha^2{\lambda_0}^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^2}\right]|E|*\{1\}\\ &\leqq\left[\frac{K}{\alpha^2{\lambda_0}^2}\right]\left\{\int_0^t|E|(u)du\right\}\qquad(K\text{ は正定数})\end{aligned}$$

こうして(22)′で与えられる $U(\lambda)=U(\lambda,t)$ の評価が得られた．すなわち(22)′において

$$(23)\quad \begin{cases} |r(\lambda,t)| \leqq \dfrac{K}{\alpha^2\lambda_0{}^2}\displaystyle\int_0^t |E(u)|du \qquad (0<\lambda\leqq\lambda_0,\ 0\leqq t), \\ K = 6\sqrt{\dfrac{6}{\pi e^3}}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2\nu-1)^2} \end{cases}$$

これによって，Thomson ケーブルにおいて，ケーブルの長さ λ_0 が著しく長いときの評価が得られた．すなわち

命題 32　(23)において $\lambda_0\to\infty$ のとき $r(\lambda)$ の項は無視できるので，$E=\{E_0\}$ かつ $\alpha=\sqrt{RC}$ である Thomson ケーブルについては

$$U(\lambda) = \frac{E_0}{s}e^{-\sqrt{RC}\,\lambda\sqrt{s}}$$

すなわち§25の(56)式によって

$$(24)\qquad U(\lambda,t) = E_0\left\{\mathrm{Cerf}\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right\}^{1)}$$

また，$L=G=0$ と§32の(1)′とにより

$$I(\lambda) = -\frac{I}{R}U'(\lambda) = E_0\sqrt{C/R}\,\frac{I}{\sqrt{s}}e^{-\lambda\sqrt{RC}\,\sqrt{s}}$$

となるから，§25の(49)式により

$$(25)\qquad I(\lambda,t) = E_0\left\{\sqrt{\frac{C}{\pi Rt}}\exp\left(-\frac{RC\lambda^2}{4t}\right)\right\}$$

となる．

§37　指数函数 $\exp(-\lambda\sqrt{\alpha s+\beta})$，$\exp(-\lambda\sqrt{\alpha s^2+\beta s})$，$\exp(-\lambda[(s+\alpha)^2-\beta^2]^{1/2})$ などの λ と t の函数としての具体的表現

電信方程式

$$U''(\lambda) = (Ls+R)(Cs+G)U(\lambda)$$

において

---

1)　$\mathrm{Cerf}\,t=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_t^{\infty}e^{-\tau^2}d\tau$，したがって初期条件 $\lim_{t\downarrow 0}U(\lambda,t)=0$ ($0<\lambda$ のとき)は成り立っているのである．

（i）　$L=0\,(R>0, C>0, G>0)$ の場合には

$$\exp(-\lambda(RCs+RG)^{1/2})$$

（ii）　$G=0\,(L>0, R>0, C>0)$ の場合には

$$\exp(-\lambda(LCs^2+RCs)^{1/2})$$

(iii)　$L>0, R>0, C>0, G>0$ の場合には

$$\begin{aligned}(Ls+R)(Cs+G) &= LC\left(\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+s+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)\right)\\ &\quad\times\left(\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+s-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)\right)\\ &= \frac{1}{LC}(CR+LCs)(LG+LCs) = (R+Ls)(G+Cs)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases}\exp(-\lambda(LC[(s+\alpha)^2-\beta^2])^{1/2}),\ \text{ただし}\\ \alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R}{L}+\dfrac{G}{C}\right),\ \beta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R}{L}-\dfrac{G}{C}\right)\end{cases}$$

などの指数函数が電信方程式の解 $U(\lambda)$ として登場してくる.

本節では，これらの指数函数を λ と t の函数として具体的に表現する Mikusiński の巧妙な方法を述べ，(i) 乃至 (iii) について後の節で論ずる準備とする.

まず**写像 T^α の定義**から始める．α を任意の複素数として，$a\in\mathscr{C}$ に同じく $\mathscr{C}$ に属する

(26)　$$T^\alpha a = T^\alpha\{a(t)\} = \{e^{\alpha t}a(t)\}$$

を対応させる**写像** (mapping) を T^α と書く.

(27)　$$T^\alpha T^\beta a = T^{\alpha+\beta}a,\ \ T^\alpha(a+b) = T^\alpha a+T^\alpha b$$

は明らかであろう．また次の式が成り立つ

(28)　$$T^\alpha(ab) = (T^\alpha a)\cdot(T^\alpha b)$$

証明

$$\begin{aligned}T^\alpha(ab) &= \left\{e^{\alpha t}\int_0^t a(t-u)b(u)du\right\}\\ &= \left\{\int_0^t e^{\alpha(t-u)}a(t-u)e^{\alpha u}b(u)du\right\}\end{aligned}$$

$$= (T^\alpha a)\cdot(T^\alpha b)$$ ∎

次に任意の $a=\dfrac{q}{p}\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$ に対しても (26) の一般化として

(29) $$T^\alpha a = T^\alpha\frac{q}{p} = \frac{T^\alpha q}{T^\alpha p}$$

と定義しても矛盾はない．すなわち

(30) $$\frac{q}{p} = \frac{q_1}{p_1} \quad \text{ならば} \quad T^\alpha\frac{q}{p} = T^\alpha\frac{q_1}{p_1}$$

証明　$\dfrac{q}{p}=\dfrac{q_1}{p_1}$ から $qp_1=q_1p$．よって (28) で

$$\frac{T^\alpha q}{T^\alpha p} = \frac{T^\alpha q\cdot T^\alpha q_1}{T^\alpha p\cdot T^\alpha q_1} = \frac{T^\alpha(qq_1)}{T^\alpha(pq_1)} = \frac{T^\alpha(qq_1)}{T^\alpha(qp_1)}$$

$$= \frac{T^\alpha q\cdot T^\alpha q_1}{T^\alpha q\cdot T^\alpha p_1} = \frac{T^\alpha q_1}{T^\alpha p_1}$$ ∎

これから次式も導ける．

(28)′ $a, b\in\mathscr{C}/\mathscr{C}$ のとき $T^\alpha(ab)=(T^\alpha a)\cdot(T^\alpha b)$

(31) $\begin{cases} \gamma \text{ 倍オペレイター } [\gamma]=s\{\gamma\} \text{ に対して} \\ T^\alpha[\gamma]=[\gamma] \text{ とくに } T^\alpha I=I \end{cases}$

証明

$$T^\alpha[\gamma] = \frac{T^\alpha\{\gamma\}}{T^\alpha\{1\}} = \frac{\{e^{\alpha t}\gamma\}}{\{e^{\alpha t}\}} = \frac{[\gamma]\{e^{\alpha t}\}}{\{e^{\alpha t}\}} = [\gamma]$$ ∎

ゆえに，$a\in C/C$ のとき

(32) $$T^\alpha([\gamma]a) = [\gamma]T^\alpha a,\quad T^\alpha\left(\frac{I}{a}\right) = \frac{I}{T^\alpha a}$$

また §6 の (16) から

(33) $$T^\alpha s = T^\alpha\frac{I}{\{1\}} = \frac{I}{\{e^{\alpha t}\}} = s-[\alpha] = s-\alpha$$

なお一般に

(34) $$T^\alpha s^n = (s-\alpha)^n \qquad (n=\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ．

証明　(28)′ によって $T^\alpha s^n=(T^\alpha s)^n$ および $T^\alpha\dfrac{I}{a}=\dfrac{I}{T^\alpha a}$ を用い $T^\alpha a^{-1}=(T^\alpha a)^{-1}$ から明らか． ∎

なお一般に s の有理式 $R(s)$ に対して

$$T^{\alpha}R(s) = R(s-\alpha) \tag{35}$$

例　$\dfrac{s}{s^2+\beta^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I}{s+i\beta}+\dfrac{I}{s-i\beta}\right) = \dfrac{1}{2}\{e^{-i\beta t}+e^{i\beta t}\}$

だから（β 実数）

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = T^{\alpha}\frac{s}{s^2+\beta^2} = T^{\alpha}\{\cos\beta t\} = \{e^{\alpha t}\cos\beta t\}$$

$$T^{\alpha}\frac{I}{s^{\lambda}} = \frac{I}{(s-\alpha)^{\lambda}} \qquad (-\infty<\lambda<+\infty) \tag{36}$$

証明　$\lambda>0$ のときは

$$\frac{I}{(s-\alpha)^{\lambda}} = \left\{e^{\alpha t}\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\},\quad \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\} = \frac{I}{s^{\lambda}}$$

また，同じく $\lambda>0$ のとき

$$\begin{aligned} T^{\alpha}s^{\lambda} &= T^{\alpha}(I/(I/s^{\lambda})) = I/(T^{\alpha}(I/s^{\lambda})) \\ &= I/(I/(s-\alpha)^{\lambda}) = (s-\alpha)^{\lambda} \end{aligned}$$ ❙

特に

$$T^{\alpha}\sqrt{s} = \sqrt{s-\alpha},\quad T^{\alpha}\frac{I}{\sqrt{s}} = \frac{I}{\sqrt{s-\alpha}} \tag{37}$$

また

$$\begin{cases} T^{\alpha}\sqrt{s^2-\beta^2} = (T^{\alpha}\sqrt{s-\beta})(T^{\alpha}\sqrt{s+\beta}) \\ = \sqrt{s-\beta-\alpha}\,\sqrt{s+\beta-\alpha} = \sqrt{(s-\alpha)^2-\beta^2} \end{cases} \tag{38}$$ [1)]

次に，$f(\lambda)$ を λ について超函数的に微分可能とすると

$$(T^{\alpha}f(\lambda))' = T^{\alpha}f'(\lambda) \tag{39}$$

証明　$a\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ によって，$f(\lambda)=af_1(\lambda)$ となる $f_1(\lambda)=\{f_1(\lambda,t)\}$ におけ $f_1(\lambda,t)$ は λ に関して連続微分可能な複素数値函数とする．このとき

$$\begin{aligned} (T^{\alpha}f(\lambda))' &= T^{\alpha}a\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\alpha t}f_1(\lambda,t)\right\} = T^{\alpha}a\left\{e^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda,t)\right\} \\ &= T^{\alpha}\left(a\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda,t)\right\}\right) = T^{\alpha}f'(\lambda) \end{aligned}$$ ❙

---

1)　$\sqrt{}$ の定義は，定理 14（§ 17）におけるように，2 項定理（§ 14）を用いる h の冪級数展開によるので，等式 $\sqrt{s-\beta-\alpha}\,\sqrt{s+\beta-\alpha}=\sqrt{(s-\alpha)^2-\beta^2}$ が成り立つのである．

系として

(40) $$T^{\alpha}\exp(\lambda w)=\exp(\lambda T^{\alpha}w)$$

証明　$(T^{\alpha}\exp(\lambda w))'=T^{\alpha}(\exp(\lambda w))'=T^{\alpha}(w\exp(\lambda w))$

$$=T^{\alpha}w\cdot T^{\alpha}\exp(\lambda w)$$

でありかつ $T^{\alpha}\exp(0\cdot w)=T^{\alpha}I=I$ である.

命題 21 (§ 26) によって

$$T^{\alpha}\exp(\lambda w)=\exp(\lambda T^{\alpha}w)$$

でなければならない. ▌

応用例　§ 25 の (51) により

(41) $$e^{-\lambda\sqrt{s-\alpha}}=T^{\alpha}e^{-\lambda\sqrt{s}}=\left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(\alpha t-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\right\}$$

同じく § 25 の (49) により

(42) $$\frac{I}{\sqrt{s-\alpha}}e^{-\lambda\sqrt{s-\alpha}}=T^{\alpha}\frac{I}{\sqrt{s}}e^{-\lambda\sqrt{s}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(\alpha t-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\right\}$$

次に任意の実数 α と正数 β に対して

$(43)_1$ $$\left\{\mathrm{Erf}\left(\alpha\sqrt{t}+\frac{\beta}{\sqrt{t}}\right)\right\}=\frac{1}{s}e^{-2\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+\alpha^2}}-1\right)e^{-2\beta\sqrt{s+\alpha^2}}+\frac{I}{s},$$

$(43)_2$ $$\left\{\mathrm{Erf}\left(\alpha\sqrt{t}-\frac{\beta}{\sqrt{t}}\right)\right\}=\frac{1}{s}e^{2\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+\alpha^2}}+1\right)e^{-2\beta\sqrt{s+\alpha^2}}-\frac{I}{s}$$

証明　$\mathrm{Erf}(t)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{-u^2}du$ であるから

$$f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{t}+\beta/\sqrt{t}}e^{-u^2}du$$

とおけば

$$f'(t)=e^{-2\alpha\beta}e^{-\alpha^2 t}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}e^{-\beta^2/t}-\frac{\beta}{\sqrt{\pi t^3}}e^{-\beta^2/t}\right)$$

ゆえに § 25 の (49) と (51) により

$$\{f'(t)\}=e^{-2\alpha\beta}T^{-\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{s}}e^{-2\beta\sqrt{s}}-e^{-2\beta\sqrt{s}}\right)$$

$$=e^{-2\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+\alpha^2}}-I\right)e^{-2\beta\sqrt{s+\alpha^2}}$$

そして $f(+0)=\lim_{t\downarrow 0} f(t)=1$ だから，$f'=sf-s\{1\}$ によって $f=\frac{f'}{s}+\frac{I}{s}$ となるので $(43)_1$ が得られた．そして $(43)_2$ を証明する為に

$$g(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{t}-\beta/\sqrt{t}} e^{-u^2}du$$

と書けば，上と同じく

$$\{g'(t)\}=e^{2\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+\alpha^2}}+I\right)e^{-2\beta\sqrt{s+\alpha^2}}$$

と $g(+0)=-1$ によって $(43)_2$ が得られた．▎

$(43)_1$ と $(43)_2$ とから，次の 2 式を得る．

$(44)_1$
$$\frac{I}{s}e^{-2\beta\sqrt{s+\alpha^2}}=\left\{\frac{1}{2}e^{-2\alpha\beta}\,\mathrm{Erf}\left(\alpha\sqrt{t}-\frac{\beta}{\sqrt{t}}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}e^{2\alpha\beta}\,\mathrm{Erf}\left(\alpha\sqrt{t}+\frac{\beta}{\sqrt{t}}\right)+\frac{e^{2\alpha\beta}+e^{-2\alpha\beta}}{2}\right\},$$

$(44)_2$
$$\frac{\alpha}{s\sqrt{s+\alpha^2}}e^{-2\beta\sqrt{s+\alpha^2}}=\left\{\frac{1}{2}e^{-2\alpha\beta}\,\mathrm{Erf}\left(\alpha\sqrt{t}-\frac{\beta}{\sqrt{t}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}e^{2\alpha\beta}\,\mathrm{Erf}\left(\alpha\sqrt{t}+\frac{\beta}{\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{2\alpha\beta}-e^{-2\alpha\beta}}{2}\right\}$$

次に§26 の式(59)すなわち

(45)
$$\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\beta^2})=I-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\beta J_1(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

では，β は複素数でもよいのであった．ここで

(45)の両辺に T^α を施してから両辺に $e^{\alpha\lambda}$ を乗じて

(46)
$$\exp(\lambda(s-\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2})=e^{\alpha\lambda}-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}e^{\alpha(\lambda+t)}\beta J_1(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

この(46)で α を $-\alpha$ に，β を $i\alpha$ におきかえると

(47)
$$\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+2\alpha s})=e^{-\alpha\lambda}-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}e^{-\alpha(\lambda+t)}i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

を得る．なお，また(46)に推移オペレイター $e^{-\lambda s}$ を乗じると t を $(t-\lambda)$ におきかえることになるので，

$$(48)\quad \begin{cases} \exp(-\lambda\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}) = e^{\alpha\lambda}e^{-\lambda s} - \\ \quad -\left\{\begin{matrix} 0, & 0 \leqq t < \lambda, \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}}e^{\alpha t}\beta J_1(\beta\sqrt{t^2-\lambda^2}), & 0 \leqq \lambda < t \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

ここでは β を $i\beta$ とおきかえてもよいので

$$(48)'\quad \begin{cases} \exp(-\lambda\sqrt{(s-\alpha)^2-\beta^2}) = e^{\alpha\lambda}e^{-\lambda s} - \\ \quad -\left\{\begin{matrix} 0, & 0 \leqq t < \lambda, \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}}e^{\alpha t}i\beta J_1(i\beta\sqrt{t^2-\lambda^2}), & 0 \leqq \lambda < t \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

なおまた，(47)に推移オペレイター $e^{-\lambda s}$ を乗じて

$$(49)\quad \begin{cases} \exp(-\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s}) = e^{-\alpha\lambda}e^{-\lambda s} - \\ \quad -\left\{\begin{matrix} 0, & 0 \leqq t < \lambda, \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}}e^{-\alpha t}i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), & 0 \leqq \lambda < t \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

註　以上で，§37の始めに述べた電信方程式に関連する指数函数

(i)　$\exp(-\lambda\sqrt{\alpha s+\beta})$,

(ii)　$\exp(-\lambda\sqrt{\alpha s^2+\beta^2})$　　($\alpha>0, \beta$ は実数)

(iii)　$\exp(-\lambda((s+\alpha)^2-\beta^2)^{1/2})$

の具体的な t の函数としての表現が求められた.

演　習　問　題

§26の(62)すなわち β は複素数でもよかった所の

$$(50)\quad \frac{\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+\beta^2}))}{\sqrt{s^2+\beta^2}} = \{J_0(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\}$$

に，§26の(59)式に対して上に行ったようにして

$$(51)\quad \frac{\exp(\lambda(s-\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}))}{\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}} = \{e^{\alpha(\lambda+t)}J_0(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\}$$

$$(52)\quad \frac{\exp(\lambda(s-\sqrt{s^2+2\alpha s}))}{\sqrt{s^2+2\alpha s}} = \{e^{-\alpha(\lambda+t)}J_0(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\}$$

(53) $$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2})}{\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}}=\left\{\begin{matrix}0, & 0\leqq t<\lambda \\ e^{\alpha t}J_0(\beta\sqrt{t^2-\lambda^2}), & 0\leqq\lambda<t\end{matrix}\right\}$$

(54) $$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s})}{\sqrt{s^2+2\alpha s}}=\left\{\begin{matrix}0, & 0\leqq t<\lambda \\ e^{-\alpha t}J_0(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), & 0\leqq\lambda<t\end{matrix}\right\}$$

を求めよ.

§38　自己インダクタンスのないケーブル

$L=0$ で $R>0$, $C>0$, $G>0$ の場合で電信方程式の超函数方程式は

(55) $$U''(\lambda)=(RCs+RG)U(\lambda) \qquad (0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)$$

となる. 境界条件は

(56) $$U(0)=E=\{E_0\},\ U(\lambda_0)=0$$

である. よって

(57) $$\alpha=\sqrt{RC},\ \gamma=RG/RC=G/C$$

とおくと, (55)の解 $U(\lambda)$ は, $a\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$, $b\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ による一次結合

$$U(\lambda)=a\exp(-\alpha\lambda\sqrt{s+\gamma})+b\exp(\alpha\lambda\sqrt{s+\gamma})$$

において, a と b は境界条件(56)から定めるとよい. すなわち

$$a+b=E,\ a\exp(-\alpha\lambda_0\sqrt{s+\gamma})+b\exp(\alpha\lambda_0\sqrt{s+\gamma})=0$$

を解いて

$$a=\frac{E}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s+\gamma}}},\ b=\frac{e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s+\gamma}}E}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s+\gamma}}}$$

となるので

(58) $$U(\lambda)=\frac{(e^{-\alpha\lambda\sqrt{s+\gamma}}-e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s+\gamma}})}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s+\gamma}}}E$$

ここで

$$T^{\gamma}U(\lambda)=\frac{e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}-e^{\alpha(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}\hat{E} \qquad (\hat{E}=T^{\gamma}E)$$

において, §36における無限に長いケーブルの場合と同じく λ_0 を十分大きくすると

$$T^{\gamma}U(\lambda)=e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}\hat{E}$$

と考えても差し支えない．従って結局

$$U(\lambda)=T^{-\gamma}(e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}\hat{E})=e^{-\alpha\lambda\sqrt{s+\gamma}}E$$

となり $E=\{E_0\}$ であったから

(59)
$$U(\lambda)=\frac{[E_0]}{s}\exp\left(-RC\lambda\sqrt{s+\frac{G}{C}}\right)$$

ゆえに§37の $(44)_1$ により

(60)
$$\begin{cases} U(\lambda,t)=\dfrac{E_0}{2}\Bigl[e^{-\lambda\sqrt{RG}}\,\mathrm{Erf}\Bigl(\sqrt{\dfrac{Gt}{C}}-\dfrac{\lambda}{2}\sqrt{\dfrac{RC}{t}}\Bigr) \\ \qquad -e^{\lambda\sqrt{RG}}\,\mathrm{Erf}\Bigl(\sqrt{\dfrac{Gt}{C}}+\dfrac{\lambda}{2}\sqrt{\dfrac{RC}{t}}\Bigr)+(e^{\lambda\sqrt{RG}}+e^{-\lambda\sqrt{RG}})\Bigr] \end{cases}$$

次に $I(\lambda,t)$ については，§32の $(1)'$ で $L=0$ として

(61)
$$I(\lambda)=\frac{-1}{R}U'(\lambda)=\frac{E_0\sqrt{RCs+RG}}{Rs}\exp(-\lambda\sqrt{RCs+RG})$$

$$=E_0\left(\frac{C}{\sqrt{RCs+RG}}+\frac{G}{s\sqrt{RCs+RG}}\right)\exp(-\lambda\sqrt{RCs+RG})$$

したがって§37の(42)と $(44)_2$ とにより

(62)
$$\begin{cases} I(\lambda,t)=\sqrt{\dfrac{C}{R}}\dfrac{E_0}{\sqrt{\pi t}}\exp\Bigl(-\dfrac{G}{C}t-\dfrac{RC}{4t}\lambda^2\Bigr) \\ \qquad +\sqrt{\dfrac{G}{R}}\dfrac{E_0}{2}\Bigl[e^{-\lambda\sqrt{RG}}\,\mathrm{Erf}\Bigl(\sqrt{\dfrac{Gt}{C}}-\dfrac{\lambda}{2}\sqrt{\dfrac{RC}{t}}\Bigr) \\ \qquad +e^{\lambda\sqrt{GR}}\,\mathrm{Erf}\Bigl(\sqrt{\dfrac{Gt}{C}}+\dfrac{\lambda}{2}\sqrt{\dfrac{RC}{t}}\Bigr)-(e^{\lambda\sqrt{RG}}-e^{-\lambda\sqrt{RG}})\Bigr] \end{cases}$$

も得られた．

§39　リークのないケーブル

$G=0\,(L>0, C>0, R>0)$ の場合で，実用上しばしば現れてくるという．多くの計算で電流の漏洩は無視できる程小さいことによるというのである．

電信方程式の超函数方程式は

(63)
$$U''(\lambda)=(LCs^2+RCs)U(\lambda),\quad U(0)=E$$

である．この方程式の解は一般に

$$(64)\qquad \begin{cases} U(\lambda) = a\exp(-\lambda\sqrt{LCs^2+RCs})+b\exp(\lambda\sqrt{LCs^2+RCs}) \\ a\in\mathcal{C}/\mathcal{C},\ b\in\mathcal{C}/\mathcal{C} \end{cases}$$

の形に与えられることは§28に述べてある．

ところで，上の超函数解のうちで，工学的に意味があるように，$U(\lambda)=\{U(\lambda,t)\}$ のような(λ,t)の実数値函数解 $\{U(\lambda,t)\}$ を問題とするならば，次の命題が成り立つ．

命題 33 (64)に与えられた $U(\lambda)$ が

$$0\leqq\lambda<+\infty,\quad 0\leqq t<\infty$$

で(λ,t)の実数値函数であるならば $b=0$ でなければならない．

証明 §14に与えた一般2項定理を用い

$$(65)\qquad (LCs^2+RCs)^{1/2} = \sqrt{LC}\,s\left(I+\frac{R}{Ls}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{LC}\,s\left(I+\frac{R}{2Ls}+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(\frac{R}{L}\right)^n h^n\right)$$

$$= \sqrt{LC}s+\frac{\sqrt{LC}R}{2L}+f = \sqrt{LC}s+\alpha+f$$

を得る．ここに

$$(66)\qquad \alpha = \frac{\sqrt{C}\,R}{2\sqrt{L}},\quad f = \{f(t)\} = \left\{\sum_{n=2}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(\frac{R}{L}\right)^n h^{n-1}\right\}\in\mathcal{C}$$

である[1]．

(64), (65), (66)から，命題23(§26)により

$$U(\lambda)-a\exp(-\lambda\sqrt{LC}s)e^{-\lambda\alpha}e^{-\lambda f} = b\exp(\lambda\sqrt{LC}s)e^{\lambda\alpha}e^{\lambda f}$$

したがって

$$e^{-\lambda\alpha}e^{-\lambda f}U(\lambda)-a\exp(-\lambda\sqrt{LC}s)e^{-2\lambda\alpha}e^{-2\lambda f} = b\exp(\lambda\sqrt{LC}s)$$

ここで $a=\dfrac{q}{p}$，$b=\dfrac{q_1}{p_1}$ ともに $\in\mathcal{C}/\mathcal{C}$ として，上式両辺に pp_1 を(合成積の意味で)乗じて

$$pp_1e^{-\alpha\lambda}e^{-\lambda f}U(\lambda)-qp_1e^{-2\lambda\alpha}e^{-2\lambda f}\exp(-\lambda\sqrt{LC}s) = pq_1\exp(\lambda\sqrt{LC}s)$$

を得る．$f\in\mathcal{C}$ だから $e^{-2\lambda f}$ は(λ,t)の連続な実数値函数である．また推移オペ

1) h の羃級数のことは§17に述べてある．

レイター $\exp(-\lambda\sqrt{LC}s)$ の性質から，$\lambda\geqq 0$ のとき

$$\exp(-\lambda\sqrt{LC}s)(qp_1e^{-2\lambda\alpha}e^{-2\lambda f})$$

は t の函数としては実数値函数 $\in\mathscr{K}=K[0,\infty)$ になるから，前頁末の式左辺は $0\leqq\lambda, 0\leqq t$ で (λ,t) の実数値函数となる．故に，$0\leqq\lambda$，$0\leqq t$ で前頁末右辺の

$$\exp(\lambda\sqrt{LC}s)pq_1$$

も (λ,t) の実数値函数になる．

ところが，任意の $\lambda_0>0$ と $\lambda_0\geqq\lambda>0$ なる λ に対して $\exp(\lambda_0\sqrt{LC}s)pq_1=\{g(t)\}$ とおいたとき

$$(67)\qquad \begin{cases}\exp(\lambda\sqrt{LC}s)pq_1 = \exp(-(\lambda_0-\lambda)\sqrt{LC}s)\exp(\lambda_0\sqrt{LC}s)pq_1\\ \qquad\qquad\qquad\quad = \exp(-(\lambda_0-\lambda)\sqrt{LC}s)\{g(t)\}\end{cases}$$

となるので，推移オペレイター $\exp(-(\lambda_0-\lambda)\sqrt{LC}s)$ の性質から，$0\leqq t<(\lambda_0-\lambda)\sqrt{LC}$ においては

$$\exp(-(\lambda_0-\lambda)\sqrt{LC}s)\{g(t)\}=0$$

でなければならない．λ_0 は任意の正数であったから（ケーブルが著しく長いということから），(67) で

$$\exp(\lambda\sqrt{LC}s)pq_1=0$$

となり，したがって

$$b\exp(\lambda\sqrt{CL}s)=\frac{I}{pp_1}\exp(\lambda\sqrt{CL}s)pq_1=0$$

ところが $\exp(\lambda\sqrt{CL}s)=I/\exp(-\lambda\sqrt{CL}s)$ は 0 でないから $b=0$ でなければならない．▌

こうして，<u>ケーブルが非常に長いと仮定して</u>

$$(68)\qquad U(\lambda)=E\exp(-\lambda\sqrt{LCs^2+RCs})$$

が得られた．ここに $E=\{E(t)\}$ は，ケーブルの始点 $\lambda=0$ に与えられる起電力で，$E=\{E_0\}$ の場合には

$$(68)'\qquad U(\lambda)=\frac{E_0}{s}\exp(-\lambda\sqrt{LCs^2+RCs})$$

電流は §32 の $(1)'$ によって

(69) $$I(\lambda)=\frac{-U'(\lambda)}{Ls+R}$$

ゆえに $\alpha'=\frac{1}{2}\frac{R}{L}$ として

$$U(\lambda)=\frac{E_0}{s}\exp(-\lambda\sqrt{LC}\sqrt{s^2+2\alpha's})$$
$$=E_0h\exp(-\lambda\sqrt{LC}\sqrt{s^2+2\alpha's})$$

よって§37の(49)から，<u>$0\leqq\sqrt{LC}\lambda<t$ のところでは</u>

(70) $$U(\lambda,t)=E_0\left(e^{-\alpha'\sqrt{LC}\lambda}-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{LC}\lambda}^{t}\frac{\sqrt{LC}\lambda\cdot R/L}{\sqrt{\tau^2-LC\lambda^2}}e^{-\alpha'\tau}iJ_1(i\alpha\sqrt{\tau^2-LC\lambda^2})d\tau\right)$$

同じく§37の(54)から，<u>$0\leqq\sqrt{LC}\lambda<t$ のところで</u>

(71) $$I(\lambda)=-\frac{U'(\lambda)}{Ls+R}=\frac{E_0/s}{Ls+R}\sqrt{LCs^2+RCs}\exp(-\lambda\sqrt{LCs^2+RCs})$$
$$=\frac{E_0C}{\sqrt{LCs^2+RCs}}\exp(-\lambda\sqrt{LCs^2+RCs})$$
$$=I(\lambda,t)=E_0\sqrt{C/L}e^{-\alpha't}J_0(i\alpha'\sqrt{t^2-LC\lambda^2})$$

そうして，$0\leqq t<\sqrt{LC}\lambda$ のところでは $U(\lambda,t)$，$I(\lambda,t)$ ともに0になっている．

ゆえに電流の波は速度 $1/\sqrt{LC}$ で動き，波頭が座標 λ の点に達したときの[1]

$$\begin{cases}\text{電圧の値は，}\ E_0\exp\left(-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\lambda\right),\\ \text{電流の値は，}\ E_0\sqrt{\frac{C}{L}}\exp\left(-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\lambda\right)\end{cases}$$

になっているわけである．

§40　4つのパラメター L,R,C,G がすべて正数の場合のケーブル

§37に示したように，この場合は

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right),\quad \beta=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)$$

---

1) $t=\sqrt{LC}\lambda$ のときの $e^{-\alpha t}=\exp\left(-\frac{R}{2L}\sqrt{LC}\lambda\right)=\exp\left(-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\lambda\right)$

とおくと，電信方程式の超函数微分方程式は

$$U''(\lambda) = LC[(s+\alpha)^2-\beta^2]U(\lambda);\quad U(0) = E = \{E_0\}$$

となる．例の通りこれの解 $U(\lambda)$ は，$a, b \in \mathcal{C}/\mathcal{C}$ によって

$$U(\lambda) = a\exp(-\lambda\sqrt{LC}\sqrt{(s+\alpha)^2-\beta^2})+b\exp(\lambda\sqrt{LC}\sqrt{(s+\alpha)^2-\beta^2})$$

で与えられる．これに**境界条件**

$$U(0) = E = \{E_0\},\quad U(\lambda_0) = 0$$

を入れると，ケーブルが非常に長ければ前§39と同じ考え方で，

$$0 \leqq \lambda,\ 0 \leqq t$$

において (λ, t) の実数値函数になるような解 $U(\lambda) = \{U(\lambda, t)\}$ では $b=0$ でなければならないことがわかる．

ゆえに，ケーブルが非常に長いときには，工学的に意味のあるような解 $U(\lambda)$ は

$$(72)\qquad U(\lambda) = \frac{E_0}{s}\exp(-\lambda\sqrt{LC}((s+\alpha)^2-\beta^2)^{1/2})$$

となるので，§32の(1)′によって

$$I(\lambda) = \frac{-U'(\lambda)}{Ls+R}$$

$$= E_0\frac{\sqrt{LC}((s+\alpha)^2-\beta^2)^{1/2})}{s(Ls+R)}\exp(-\lambda\sqrt{LC}((s+\alpha^2)-\beta^2)^{1/2})$$

これから

$$(73)\qquad I(\lambda) = E_0\sqrt{\frac{C}{L}}\left(I+\frac{G}{Cs}\right)\frac{\exp(-\lambda\sqrt{LC}((s+\alpha)^2-\beta^2)^{1/2})}{((s+\alpha)^2-\beta^2)^{1/2}}$$

も得られる[1)]．

ゆえに§37の(48)′式と(53)式とから，$0\leqq\sqrt{LC}\lambda<t$ においては，前§39のようにして

$$(72)'\quad U(\lambda, t) = E_0(e^{-\alpha\lambda\sqrt{LC}}-\int_{\sqrt{LC}\lambda}^{t}\frac{\lambda\sqrt{LC}}{\sqrt{\tau^2-\lambda^2LC}}e^{-\alpha\tau}i\beta J_1(i\beta\sqrt{\tau^2-LC\lambda^2})d\tau),$$

1) $\sqrt{\frac{C}{L}}\left(I+\frac{G}{Cs}\right)\times\frac{s(Ls+R)}{\sqrt{LC}} = \frac{(Cs+G)(Ls+R)}{LC} = (s+\alpha)^2-\beta^2$

(73)′
$$I(\lambda,t)=E_0\sqrt{\frac{C}{L}}\left((e^{-\alpha t}J_0(i\beta\sqrt{t^2-LC\lambda^2})\right.$$
$$\left.+\frac{G}{C}\int_{\sqrt{LC}\lambda}^{t}e^{-\alpha\tau}J_0(i\beta\sqrt{\tau^2-LC\lambda^2})d\tau\right)$$

が得られた．そして $0\leqq t<\sqrt{LC}\lambda$ においては電圧 $U(\lambda,t)$ 電流 $I(\lambda,t)$ ともに0である．

註　λ が増すときに，α が大きい程ますます速く電圧と電流とは減少する．α を**減衰係数**と呼ぶ理由である．β の方は**変形係数**と呼ばれる．β が0のときには，波は λ が増えるときに減衰はするが変形はしないからであろう．

第9章　熱の方程式

§41　棒の温度

$\lambda=0$ および $\lambda=\lambda_0>0$ を両端とする棒の，比熱を c，熱伝導率を k，密度を ρ とする．そして棒の側面を通しては全く熱の出入がなく，熱はただ棒の両端 $\lambda=0$，$\lambda=\lambda_0$ を通してのみ流入し流出するものと仮定する．棒の座標 λ のところでの時刻 t における温度を $z(\lambda,t)$ で表わすならば熱方程式

(1)
$$z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)=\alpha^2 z_t(\lambda,t),\ \ (\alpha=\sqrt{c\rho/k})$$

が成り立つ．

初期時刻 $t=0$ においては棒全体の温度を 0,

(2)
$$z(\lambda,0)=0 \qquad (0\leqq\lambda<\lambda_0)$$

とし，また棒の両端における温度の時間的変化が次式で与えられるものとする．

(3)
$$z(0,t)=v_1(t),\ \ z(\lambda_0,t)=v_2(t) \qquad (0\leqq t<\infty)$$

仮定(2)によって，$z_t=sz$ となるので(1)の超函数微分方程式は

(4)
$$z''(\lambda)=\alpha^2 sz(\lambda)$$

となる．(4)の解 $\exp(-\alpha\lambda\sqrt{s})$，$\exp(\alpha\lambda\sqrt{s})$ の，$\mathcal{C}/\mathcal{C}$ に属する a,b による一次結合

$$z(\lambda)=ae^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}+be^{+\alpha\lambda\sqrt{s}}$$

は，明らかに(4)の解である．これが境界条件(3)を満足するように

(5)
$$\begin{cases} z(0)=v_1:\ a+b=v_1 \\ z(\lambda_0)=v_2:\ ae^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}}=v_2 \end{cases}$$

を書くと，§29における と同じような計算で

$$(6)\qquad a=\frac{v_1-v_2e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{t}}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}},\quad b=\frac{-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}v_1+e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}}v_2}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}$$

が得られて

$$(7)\qquad \begin{aligned} z(\lambda)&=\frac{e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}-e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}v_1\\ &\quad+\frac{e^{-\alpha(\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}}-e^{-\alpha(\lambda_0+\lambda)\sqrt{s}}}{I-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}v_2\\ &=z_1(\lambda)+z_2(\lambda)\end{aligned}$$

しかもこの超函数解 $z(\lambda)$ は(4)と(3)とによって一意的に定まることも§29における と同じ論法で証明される.

ところで，§35–§36におけるのと全く同じようにして，$z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$ の級数展開が出来る. すなわち

$$(8)\qquad z_1(\lambda)=v_1\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(e^{-\alpha(2\nu\lambda_0+\lambda)\sqrt{s}}-e^{-\alpha(2(\nu+1)\lambda_0-\lambda))\sqrt{s}}),$$

$$(9)\qquad z_2(\lambda)=v_2\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(e^{-\alpha((2\nu+1)\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}}-e^{-\alpha((2\nu+1)\lambda_0+\lambda)\sqrt{s}})$$

そして§25の(56)式

$$\frac{I}{s}\exp(-\lambda s^{1/2})=\left\{\mathrm{Cerf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right\}=\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda/2\sqrt{t}}^{\infty}e^{-v^2}dv\right\}$$

によって，棒の始点における温度が一定で $v_1=\{E_1\}$ すなわち $V_1=E_1/s$ のときは,

$$(8)'\qquad z_1(\lambda,t)=E_1\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha(2\nu\lambda_0+\lambda)/2\sqrt{t}}^{\alpha(2(\nu+1)\lambda_0-\lambda)/2\sqrt{t}}e^{-v^2}dv\right\},$$

同じく $v_2=\{E_2\}=E_2/s$ のときは

$$(9)'\qquad z_2(\lambda,t)=E_2\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha((2\nu+1)\lambda_0-\lambda)/2\sqrt{t}}^{\alpha((2\nu+1)\lambda_0+\lambda)/2\sqrt{t}}e^{-v^2}dv\right\}$$

が得られた. いずれも $0\leqq\lambda<\lambda_0,\ 0<t<\infty$ においてのことである.

こうして

$$\begin{cases} z_1(\lambda,0)=\lim\limits_{t\downarrow 0}z_1(\lambda,t)=0,\quad z_1(0,t)=E_1,\\ z_1(\lambda_0,t)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2(\lambda, 0) = \lim_{t \downarrow 0} z_2(\lambda, t) = 0, \quad z_2(0, t) = 0, \\ z_2(\lambda_0, t) = E_2 \end{cases}$$

のごとく，初期条件($t=0$ での条件)と境界条件($\lambda=0$，$\lambda=\lambda_0$ での条件)が満たされているのである.

註　解 $z_1(\lambda, t)$ は (λ, t) の函数として，$t=0$ では定義されていない．しかし $z_1(\lambda, 0)=\lim_{t \downarrow 0} z_1(\lambda, t)=0$ と規約しておけば，$z_1(\lambda, 0)$ は $0 \leqq \lambda < \infty$，$0 \leqq t < \infty$ で，原点 $\lambda=0$, $t=0$ を除いて，連続になっている．この規約のもとに，超函数的な熱の方程式(4)を取扱ったのであった.

§42　無限に長い棒の温度

前§41の解(7)すなわち

初期条件 $z_1(\lambda, 0) = 0\ (0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0)$,

境界条件 $z_1(0, t) = \{v_1(t)\}$，$z(\lambda_0, t) = 0$

を満たす

$$z_1''(\lambda) = \alpha^2 s z_1(\lambda)$$

の解 $z_1(\lambda)$ において $\lambda_0 \to \infty$ として，無限に長い棒での温度分布の議論になることは，すでに§36の無限に長い Thomson ケーブルのところで述べた.

$\lambda \to \infty$ のときに，$z(\lambda_0, t)=0$ として $\lambda_0 \to \infty$ にするというのよりももっとゆるやかな条件

(10)　$$|z(\lambda, t)| \leqq m(t) \qquad (0 \leqq \lambda < \infty,\ 0 \leqq t < \infty)$$

を考えて見よう．そうすると

命題 34

(11)　$$z''(\lambda) = \alpha^2 z(\lambda) \qquad (0 \leqq \lambda < \infty)$$

の超函数解 $z(\lambda)$ は，度々やったように

(12)　$$z(\lambda) = a e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}} + b e^{\alpha\lambda\sqrt{s}} \qquad (a, b \in \mathcal{C}/\mathcal{C})$$

において a, b を適当にとって境界条件

(13)　$$z(0, t) = \{v_1(t)\}$$

と(10)を満たすものとして選ばれるわけであるが，その超函数が物理的に意味

付けできるように，$z(\lambda)$ が $0\leqq\lambda<\infty$，$0\leqq t<\infty$ で (λ, t) の実数値函数で表わされることを要請すると，

$$z(\lambda)=v_1 e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}=z_1(\lambda) \tag{14}$$

と一意的に確定する.

証明 (12) から

$$b=z(\lambda)e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}-ae^{-2\alpha\lambda\sqrt{s}} \tag{15}$$

であるが，(21)′(§36 の) によって

$$0\leqq e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}\leqq\left[3\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}\frac{1}{\alpha^2\lambda^2}\right]h$$

が成り立つ[1].

ゆえに $|z(\lambda, t)|\leqq m(t)$ という仮定を用い

$$\lim_{\lambda\to\infty} z(\lambda, t)e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}=0,\ \lim_{\lambda\to 0} ae^{-2\alpha\lambda\sqrt{s}}=0$$

を得るので，(15) により $b=0$ となるから，(13) を用い，(12) における $a=\{v_1(t)\}$ となって (14) が証明された. ∎

ゆえに，命題 34 の仮定のもとに，§25 の (56) 式によって，$v_1=\{E_1\}$ すなわち $v_1=E_1/s$ のとき

$$z(\lambda, t)=E_1\left\{\mathrm{Cerf}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{t}}\right\}=E_1\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha\lambda/2\sqrt{t}}^{\infty}e^{-v^2}dv\right\} \tag{16}$$

が得られた. これは

$$z(0, t)=E_1,\ \lim_{t\downarrow 0} z(\lambda, t)=0$$

に適合している.

適用例[2] 初期 $(t=0)$ 温度 0°C の長い銀の棒の一端 $(\lambda=0)$ はつねに 100°C に熱せられているものとする. 銀であるから，

比熱 $c=0.055$，伝導率 $k=1.01$. 密度 $\rho=10.5$

として

$$\alpha=\sqrt{\frac{0.055\times 10.5}{1.01}}\approx 0.756$$

1) t の函数で表わしたとき，この不等式がすべての t で成り立つ.
2) Mikusiński 邦訳，上巻 p. 215

となるから

$$z(\lambda,t)=100\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0.378\lambda/\sqrt{t}}^{\infty}e^{-v^2}dv$$

である.

§43　熱の流出のない棒の温度

方程式

$$z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)=\alpha^2 z_t(\lambda,t)\qquad(0\leqq\lambda\leqq\lambda_0,\ 0\leqq t<\infty)$$

を，条件

$$z(\lambda,0)=0\qquad(0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)$$

$$z(0,t)=v_1(t),\ z_\lambda(\lambda_0,t)=0\qquad(0\leqq t<\infty)$$

のもとに解く.

上の $z_\lambda(\lambda_0,t)$ は，時刻 t に点 $\lambda=\lambda_0$ を通って流出する熱の量で，$z_\lambda(\lambda_0,t)=0$ は棒の右端 $\lambda=\lambda_0$ が(棒の側面と同じく)周囲から完全に絶縁されていることを意味する.

超函数方程式は前と同じで

$$z''(\lambda)=\alpha^2 sz(\lambda)$$

で境界条件は

$$z(0)=v_1,\ z'(\lambda_0)=0$$

である. ゆえに

$$z(\lambda)=ae^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda\sqrt{s}}\qquad(a,b\in\mathscr{C}/\mathscr{C})$$

として，a,b は境界条件から

$$a+b=v_1,\ \ -a\alpha\sqrt{s}\,e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}}+b\alpha\sqrt{s}\,e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}}=0$$

によって定める. すなわち

$$a=\frac{v_1}{I+e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}},\ \ b=\frac{v_1e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}{I+e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}\tag{17}$$

となり

$$z(\lambda)=\frac{e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}+e^{-\alpha(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}}}{I+e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}v_1\tag{18}$$

となる.

これと §41 の (7) で与えられる $z_1(\lambda)$ との違いは，分子と分母における (7) での差が (18) では和になっているところだけである．だから今度は

$$\frac{I}{I+e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}e^{-2\nu\alpha\lambda_0\sqrt{s}}$$

なる展開を用い §41 の (8) にあたるものを求めればよい．無限級数の収束することなど §41 にならえばよいので省略する.

§44 初期温度の分布が与えられた熱方程式，Fourier 級数の方法

棒について，初期温度分布

$$z(\lambda,0)=\phi(\lambda)\qquad(0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)$$

が与えられている場合には

$$z_t(\lambda,t)=sz(\lambda,t)-[z(\lambda,0)]$$

であるから，超函数方程式は，$\phi(\lambda)$ を $\boldsymbol{\phi(\lambda)}$ **倍オペレイター**として

$$z''(\lambda)-\alpha^2sz(\lambda)=-\alpha^2\phi(\lambda)\qquad(0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)\tag{19}$$

の形になる．これを境界条件

$$z(0)=0,\ \ z(\lambda_0)=0\tag{20}$$

によって解きたい．一般の実数値連続函数 $\phi(\lambda)$ に対して (19) の**超函数解**を求める為には，命題 26 を使えるように，$\phi(\lambda)$ を $\lambda<0$ のところまで連続函数として拡張すればよい．（本節の終りの註 2 参照）

ここでは $\phi(\lambda)$ の形によっては (19) の解が簡単に求められる例を示そう.

例 n を自然数とし

$$\phi(\lambda)=\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}\qquad(0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)\tag{21}$$

とする．このとき

$$z''(\lambda)-\alpha^2sz(\lambda)=-\alpha^2\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}\qquad(\alpha>0)\tag{22}$$

を境界条件 (20) で解く為に上式右辺が $\lambda=0$，$\lambda=\lambda_0$ で 0 になることに示唆されて

(23) $$z(\lambda) = a\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \qquad (a\in\mathcal{C}/\mathcal{C})$$

の形での(22)-(20)の解を求めてみる．(23)を(22)に代入すると

$$-a\frac{n^2\pi^2}{{\lambda_0}^2}-a\alpha^2 s = -\alpha^2$$

となるので

$$a = \frac{I}{s+n^2\beta^2} = \{\exp(-n^2\beta^2 t)\} \qquad (\beta=\pi/\alpha\lambda_0)$$

を得る．ゆえに(20)-(22)の解として

(24) $$z(\lambda) = \{z(\lambda, t)\} = \left\{\exp(-n^2\beta^2 t)\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}\right\}$$

が求められた．

この解の一意性はつぎのようにしてわかる．(24)の $z(\lambda)$ の他に(20)-(22)の解 $\hat{z}(\lambda)$ があったとして $w(\lambda)=z(\lambda)-\hat{z}(\lambda)$ を作ると，$w(\lambda)$ は

$$w''(\lambda)-\alpha^2 s w(\lambda) = 0,\ \ w(0) = 0,\ \ w(\lambda_0) = 0$$

の解である．この解は，たびたび行ったように，

$$w(\lambda) = ae^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda\sqrt{s}} \qquad (a, b\in\mathcal{C}/\mathcal{C})$$

が $w(0)=0$，$w(\lambda_0)=0$ を満足する条件

$$a+b = 0,\ \ ae^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}}+be^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}} = 0$$

から $a=0$，$b=0$ を得るので $w(\lambda)=0$ となり $z(\lambda)=\hat{z}(\lambda)$． ▎

上の例の応用　$\phi(\lambda)$ が，

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \qquad (0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)$$

のように $[0, \lambda_0]$ で一様収束する正弦級数に展開されているとするときに

(22)′ $$z''(\lambda)-\alpha^2 s z(\lambda) = -\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$$

と(20)とを満たす解 $z(\lambda)$ は

(24)′ $$z(\lambda) = \{z(\lambda, t)\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2{\lambda_0}^2}t\right)\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}\right\}$$

で与えられる．ただし右辺を λ に関して2回項別微分した

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left(\frac{n\pi}{\lambda_0}\right)^2\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2{\lambda_0}^2}t\right)\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$$

が $0\leqq\lambda\leqq\lambda_0$，$0\leqq t$ で一様収束して $z_{\lambda\lambda}(\lambda,t)$ を表わすように，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|\left(\frac{n\pi}{\lambda_0}\right)^2<+\infty \tag{25}$$

が満足されていると仮定する[1]．この仮定があると，(24)′ の右辺を t に関して1回項別微分した

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2{\lambda_0}^2}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2{\lambda_0}^2}t\right)\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$$

も $0\leqq\lambda\leqq\lambda_0$，$0\leqq t$ で一様収束して $z_t(\lambda,t)$ を表わすからである．

註1　Fourier 級数展開を利用する熱方程式の解法については多くの教科書があるので次の§45に今一つの解法例を与えるだけに止める．

註2　例の前に述べたように，(19)のように右辺の項 $-\alpha^2\phi(\lambda)$ がある場合には，命題26を用いて(19)の**超函数解**を求めることはできる．しかしこの解が (λ,t) の**実数値函数**としてもとの熱方程式を満足するように微分可能であることを確めることは容易でない場合がある．これが Fourier 級数展開を利用する一つの理由でもある．

§45　熱を伝導する輪の温度

長さが λ_0 の針金の輪に，時刻 $t=0$ における温度分布 $\varphi(\lambda)$ が与えられたとき，この輪を長さ λ_0 の棒と考えて，時刻 $t>0$ における棒の上の λ における温度 $z(\lambda,t)$ は超函数方程式

$$z''(\lambda)-\alpha^2sz(\lambda)=-\alpha^2\varphi(\lambda) \tag{26}$$

によって規制されると考える．以下輪になっているということから，$\varphi(\lambda)$ は λ_0 を周期とする周期函数であり，また $z(\lambda)$ も λ_0 を周期とする周期的超函数値函数と考えてすすむ．

---

1)　そうすれば，$0\leqq\lambda\leqq\lambda_0, t\geqq0$ で

$$0\leqq\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2{\lambda_0}^2}t\right)\leqq1,\ \left|\sin\frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}\right|\leqq1$$

となるから，項別微分した級数が一様収束する．

函数 $\varphi(\lambda)$ は $[0, \lambda_0]$ で一様収束する Fourier 級数

(27)
$$\varphi(\lambda) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} + \beta_n \sin\frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0}\right)$$

によって与えられたものとする.

そして解 $z(\lambda)$ も, a_n, b_n など $\in \mathcal{C}/\mathcal{C}$ として

(28)
$$z(\lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} + b_n \sin\frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0}\right)$$

によって与えられると仮定すると, 前§44 におけると同じ方法で

(29)
$$a_n = \frac{\alpha_n}{s+4n^2\beta^2}, \quad b_n = \frac{\beta_n}{s+4n^2\beta^2} \qquad \left(\beta = \frac{\pi}{\alpha\lambda_0}\right)$$

が得られて,

(30)
$$\begin{cases} z(\lambda) = \{z(\lambda, t)\} \\ = \dfrac{\alpha_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{4n^2\pi^2}{\alpha^2{\lambda_0}^2}t\right)\left(\alpha_n \cos\frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} + \beta_n \sin\frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0}\right) \end{cases}$$

求める解 $z(\lambda, t)$ が得られた. ただし, この級数が λ に関して,

$$0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0, \quad 0 \leqq t < \infty$$

で2回項別に微分出来るように, α_n, β_n は

(31)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)\left(\frac{2n\pi}{\lambda_0}\right)^2 < +\infty$$

であることを要請しておくことにする.

§46　絶縁されていない棒の温度

前節までは棒は外界から完全に絶縁されているものとして取扱った. 本節では, 棒が絶縁されていないで, 棒の各点における熱の損失は, 温度0の外界と棒の各点の温度の差——すなわち棒の各点の温度に比例する熱損失をするとして考える.

そうすると初期温度0の仮定のもとに, 温度分布の超函数方程式は

(32)
$$z''(\lambda) - (\alpha^2 s + \beta)z(\lambda) = 0 \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0)$$

となる. そして境界条件

(33)
$$z(0) = v, \quad z(\lambda_0) = 0$$

を与えて(32)を解く.

(32)は，§38に自己インダクタンスのないケーブルとして取扱った電信方程式であった．ゆえにここでは繰返して論じない．§38を復習して頂きたい.

読者の便宜上，棒が著しく長い場合で，$v=\{\omega\}=\dfrac{\omega}{s}$ のさいの(32)-(33)の一意解を書いておく．すなわち

$$z(\lambda)=\frac{\omega}{s}\exp\left(-\lambda\sqrt{\alpha^2 s+\beta}\right) \tag{34}$$

$$z(\lambda,t)=\frac{\omega}{2}\left\{e^{-\lambda\sqrt{\beta}}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\sqrt{\beta t}}{\alpha}-\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{t}}\right)-e^{\lambda\sqrt{\beta}}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\sqrt{\beta t}}{\alpha}+\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{t}}\right)+2\cos h(\lambda\sqrt{\beta})\right\} \tag{35}$$

公 式 表

I　特殊函数

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt \qquad (\S 12)$$

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda),\quad \Gamma(n)=(n-1)! \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$B(\lambda,\mu)=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}=\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt \qquad (\S 12)$$

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}=2\int_0^\infty e^{-v^2}dv$$

$$\mathrm{Erf}\, t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-v^2}dv \qquad (\S 13)$$

$$\mathrm{Cerf}\, t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-v^2}dv=1-\mathrm{Erf}\, t \qquad (\S 25)$$

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{t^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(k+n)!} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (\S 15)$$

$$J_n(it)=i^n\sum_{k=0}^\infty\frac{t^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(k+n)!} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (\S 15)$$

II　演算子法の諸公式

1. $$\begin{cases}\{a(t)\}+\{b(t)\}=\{a(t)+b(t)\},\\ \{a(t)\}\{b(t)\}=\left\{\int_0^t a(t-u)b(u)du\right\},\\ \alpha\{f(t)\}=\{\alpha f(t)\} \qquad (\alpha\ \text{複素数})\end{cases}$$

2. $$h\{f(t)\}=\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

3. $$s\{f(t)\}=\{f'(t)\}+[f(0)],\ [f(0)]=s\{f(0)\}$$

4. $$s^n f=f^{(n)}+s^{n-1}[f(0)]+\cdots+s[f^{(n-2)}(0)]+[f^{(n-1)}(0)] \qquad (\S 5)$$

5. $$T^\alpha\{f(t)\}=\{e^{\alpha t}f(t)\},\quad T^\alpha R(s)=R(s-\alpha) \qquad (\S 37)$$

6. $$\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \{f(t)\}$$ (§ 24)

III 超函数 $\in \mathscr{C}/\mathscr{C}$ のうち t の函数としての表現の表

$$\frac{I}{s} = h = \{1\}, \quad I = \frac{f}{f} \ (f(t) \not\equiv 0)$$

$$\frac{I}{s^n} = h^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

$$\frac{I}{s^\lambda} = h^\lambda = \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}$$ (§ 13)

$$\frac{I}{\sqrt{s}} = h^{1/2} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}$$ (§ 13)

$$\frac{I}{s-\alpha} = \{e^{\alpha t}\}$$ (§ 6)

$$\frac{I}{(s-\alpha)^\lambda} = \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{\alpha t}\right\}$$ (§ 13)

$$\frac{I}{\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha t}\right\}$$ (§ 13)

$$\frac{I}{s\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mathrm{Erf} \sqrt{\alpha t}\right\} \qquad (\alpha > 0)$$ (§ 13)

$$\frac{I}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t\right\}$$ (§ 9)

$$\frac{I}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[\frac{1}{\beta}\sin \beta t - t\cos \beta t\right]\right\}$$ (§ 9)

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \{e^{\alpha t} \cos \beta t\}$$ (§ 9)

$$\frac{I}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sinh \beta t\right\}$$ (§ 9)

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \{e^{\alpha t} \cosh \beta t\}$$ (§ 9)

$$\frac{I}{(s^2+\alpha^2)^{1/2}} = \{J_0(\alpha t)\}$$ (§ 17)

$$\frac{I}{(s^2-\alpha^2)^{1/2}} = \{J_0(i\alpha t)\} \qquad (\S\,17)$$

$$\frac{(s^2+\alpha^2)^{1/2}-s}{(s^2+\alpha^2)^{1/2}} = \{\alpha J_1(\alpha t)\} \qquad (\S\,17)$$

$$((s^2+\alpha^2)^{1/2}-s)^n = \left\{\frac{n\alpha^n}{t}J_n(\alpha t)\right\} \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (\S\,17)$$

$$\frac{((s^2+\alpha^2)^{1/2}-s)^n}{(s^2+\alpha^2)^{1/2}} = \{\alpha^n J_n(\alpha t)\} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (\S\,17)$$

$$\frac{I}{s}e^{-\lambda/s} = \{J_0(2\sqrt{\lambda t}\,)\} \qquad (\S\,17)$$

$$\frac{I}{s^2}e^{-\lambda/s} = \left\{\sqrt{\frac{t}{\lambda}}J_1(2\sqrt{\lambda t}\,)\right\} \qquad (\S\,17)$$

$$\frac{I}{\sqrt{s}}e^{-\lambda/s} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\lambda t}\right\} \qquad (\S\,17)$$

$$\frac{I}{\sqrt{s}}e^{\lambda s} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cosh(2\sqrt{\lambda t}\,)\right\} \qquad (\S\,17)$$

$$e^{-\lambda s} = s^2\{h_1(\lambda,t)\} = s^2\left\{\int_0^t H_\lambda(u)du\right\} = s^2\begin{Bmatrix}0, & 0\leqq t<\lambda \\ t-\lambda, & 0\leqq\lambda<t\end{Bmatrix} \qquad (\S\,18)$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s}\,) = \left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp(-\lambda^2/4t)\right\} \qquad (\S\,25)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-\lambda\sqrt{s}\,) = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp(-\lambda^2/4t)\right\} \qquad (\S\,25)$$

$$\frac{1}{s}\exp(-\lambda\sqrt{s}\,) = \{\mathrm{Cerf}(\lambda/2\sqrt{t}\,)\} \qquad (\S\,25)$$

$$\exp(\lambda[s-(s^2+\alpha^2)^{1/2}]) = I-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\} \qquad (\S\,26)$$

$$\frac{\exp(\lambda[s-(s^2+\alpha^2)^{1/2}])}{(s^2+\alpha^2)^{1/2}} = \{J_0(\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\} \qquad (\S\,26)$$

$$\exp(\lambda[s-(s^2-\alpha^2)^{1/2}]) = I-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\} \qquad (\S\,26)$$

$$\frac{\exp(\lambda[s-(s^2-\alpha^2)^{1/2}])}{(s^2-\alpha^2)^{1/2}} = \{J_0(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\} \qquad (\S\,26)$$

(以下(§26)としてないのはすべて§37から引用した)

$$\exp(\lambda[s-(s^2+2\alpha s)^{1/2}]) = e^{-\alpha\lambda} - \left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}} e^{-\alpha(\lambda+t)} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

$$\frac{\exp(\lambda[s-(s^2+2\alpha s)^{1/2}])}{(s^2+2\alpha s)^{1/2}} = \left\{e^{-\alpha(\lambda+t)} J_0(i\alpha\sqrt{\lambda^2+2\lambda t})\right\}$$

$$\exp(-\lambda(s^2+\alpha^2)^{1/2}) = e^{-\lambda s} - \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} \alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\} \qquad (\S\, 26)$$

$$\frac{\exp(-\lambda(s^2+\alpha^2)^{1/2})}{(s^2+\alpha^2)^{1/2}} = \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ J_0(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\} \qquad (\S\, 26)$$

$$\exp(-\lambda(s^2-\alpha^2)^{1/2}) = e^{-\lambda s} - \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\} \qquad (\S\, 26)$$

$$\frac{\exp(-\lambda(s^2-\alpha^2)^{1/2})}{(s^2-\alpha^2)^{1/2}} = \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ J_0(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\} \qquad (\S\, 26)$$

$$\exp(-\lambda(s^2+2\alpha s)^{1/2}) = e^{-\alpha\lambda}e^{-\lambda s} - \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} e^{-\alpha t} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\}$$

$$\frac{\exp(-\lambda(s^2+2\alpha s)^{1/2})}{(s^2+2\alpha s)^{1/2}} = \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ e^{-\alpha t} J_0(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\}$$

$$\exp(\lambda[s-((s-\alpha)^2+\beta^2)^{1/2}]) = e^{\alpha\lambda} - \left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}} e^{\alpha(\lambda+t)} \beta J_1(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

$$\frac{\exp(\lambda[s-((s-\alpha)^2+\beta^2)^{1/2}])}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^{1/2}} = \left\{e^{\alpha(\lambda+t)} J_0(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

$$\exp(-\lambda[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{1/2}) = e^{\alpha\lambda}e^{-\lambda s} - \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} e^{\alpha t} \beta J_1(\beta\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\}$$

$$\frac{\exp(-\lambda[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{1/2})}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^{1/2}} = \left\{\begin{matrix} 0, \quad 0\leqq t<\lambda \\ e^{\alpha t} J_0(\beta\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad 0\leqq\lambda<t \end{matrix}\right\}$$

（この最後の 2 つで β を $i\beta$ でおきかえたものも表に入れる）

IV 拡散オペレイター $e^{-\lambda\sqrt{s}}$ の評価

$$e^{-\lambda\sqrt{s}} \leqq \left[\frac{3}{\lambda^2}\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}\right]h \qquad (\lambda>0) \qquad (\S\,36)$$

$$\frac{I}{\sqrt{s}}e^{-\lambda\sqrt{s}} \leqq \left[\sqrt{\frac{2}{\pi e}}\frac{1}{\lambda}\right]h \qquad (\lambda>0)$$

(上式の証明：$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\lambda\sqrt{s}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\lambda^2/4t}\right\}$ の右辺の函数は $t=\frac{\lambda^2}{2}$ において最大値 $\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi e}}$ をとる).

演習問題の解

§9

1. $\lim_{z\to 1}\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{-1}{2}$, $\lim_{z\to 1}\left\{\dfrac{(z-1)}{(z-1)^2(z+1)(z-2)}-\dfrac{-1\cdot(z-1)}{2(z-1)^2}\right\}$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)}{2(z-1)(z+1)(z-2)}=\frac{-1}{4},\quad \lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{-1}{12},$$

$$\lim_{z\to 2}\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\frac{I}{(s-1)^2(s+1)(s-2)}=\frac{1}{12}\left[\frac{-6}{(s-1)^2}+\frac{-3}{s-1}+\frac{-1}{s+1}+\frac{4}{s-2}\right]$$

2. $\dfrac{I}{(s-\alpha)^2-\beta^2}=\dfrac{-1}{2\beta}\left(\dfrac{I}{(s-\alpha)+\beta}-\dfrac{I}{(s-\alpha)-\beta}\right)$

3. $\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I}{s-\alpha+\beta}+\dfrac{I}{s-\alpha-\beta}\right)$

§10

1. $y(t)=-e^{-2t}(t^2+2t+2)+2e^{-t}$

2. $y(t)=(t-1)^2e^{-t}$

3. $y(t)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}e^{2t}+\dfrac{2}{5}\cos t-\dfrac{1}{5}\sin t$

4. $y(t)=-\dfrac{1}{2}+e^{t}-\dfrac{11}{34}e^{4t}-\dfrac{3}{17}\cos t+\dfrac{5}{17}\sin t$,

$$z(t)=-\frac{2}{3}e^{t}+\frac{22}{51}e^{4t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t$$

5. $x(t)=2-e^t$, $y(t)=-2+4e^t-te^t$, $z(t)=-2+5e^t-te^t$

6. $x(t)=\dfrac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{t}{3}$

$$y(t)=\frac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\frac{1}{9}-\frac{t}{3}$$

7. $x(t)=2e^{2t}-2\cos t-3t\sin t$

$y(t)=\sin t+t\cos t-2t\sin t$

§11

1. 解があるのは $\cos 2\pi\alpha \neq 0$ のときに限り，

そのときの解 $y(t)=\dfrac{1}{\alpha\cos 2\pi\alpha}\sin\alpha t$

2. 解 $y(t)=\dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{\alpha(e^{2\pi\alpha}+e^{-2\pi\alpha})}$

§13

$$\frac{I}{\sqrt{s}\,(s-\alpha)}=h^{1/2}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha u}u^{-1/2}du\right\}$$

$$=\left\{e^{\alpha t}\int_0^{\sqrt{\alpha t}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-1}e^{-v^2}\cdot 2\frac{v}{\alpha}dv\right\}=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{Erf}\sqrt{\alpha t}\right\}$$

§17

1. $\dfrac{I}{s^2}e^{-\alpha/s}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^n h^{n+2}}{n!}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^n t^{n+1}}{n!(n+1)!}\right\}$

$$=\left\{\sqrt{\frac{t}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\sqrt{\alpha t})^{2n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\right\}=\left\{\sqrt{\frac{t}{\alpha}}J_1(2\sqrt{\alpha t})\right\}$$

2. $\dfrac{I}{\sqrt{s}}e^{\alpha/s}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n h^{n+1/2}}{n!}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n t^{n-1/2}}{n!\Gamma(n+1/2)}\right\}$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n t^{n-1/2}}{n(n-1)\cdots 1(n-1/2)(n-3/2)\cdots(1/2)\Gamma(1/2)}\right\}$$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}\alpha^n t^{n-1/2}}{(2n)(2n-1)\cdots 1}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cosh(2\sqrt{\alpha t})\right\}$$

3. §17 の (27) を見よ．

§ 26

解であることは，$z(\lambda)$ の右辺を λ について超函数的に微分するとわかる．解の一意性は二つの解の差を考えると，$f(\lambda)=0$ の場合に帰着されるので解は $z(\lambda_0)=z_0$ で一意的に定まる．

§ 28

1. $y_0(\lambda)=\dfrac{-6\lambda I}{s^3}+\dfrac{-\lambda^3 I}{s}=\{-3t^2\lambda-\lambda^3\}$

2. $y_0(\lambda)=\dfrac{-24I}{s^5}+\dfrac{-12\lambda^2 I}{s^3}+\dfrac{-\lambda^4 I}{s}=\{-t^4-6t^2\lambda^2-\lambda^4\}$

参考した文献

Heaviside の研究については

1. Heaviside, O.: Electromagnetic Theory, London, 1-3 (1893-1899)

2. Berg, E. J.: Heaviside's Operational Calculus as Applied to Engineering and Physics, McGraw-Hill Book Company (1936)

Mikusiński の研究については

3. Mikusiński, J.: Sur les fondaments du calcul opératoire, Stud, Math. 11 (1949), 41-70.

4. Mikusiński, J.: Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoires, Stud. Math. 12 (1951), 208-224.

5. Mikusiński, J.: Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leures applications aux équations classique aux derivées partielles, Stud. Math. 12 (1951), 227-270.

6. Mikusiński, J.: Operational Calculus, Pergamon Press (1959)

7. Erdélyi, A.: Operational Calculus and Generalized Functions; Holt, Reinehalt and Winston (1962)

8. ミクシンスキー演算子法([6]の邦訳); 上巻は松村英之-松浦重武共訳, 下巻は松浦重武-笠原晧司共訳. 裳華房発行(上巻は 1963 年, 下巻は 1964 年).

9. Yosida, K.-Okamoto, S.: A note on Mikusiński's operational calculus, Proc. Jap. Acad. 56, Ser. A, No. 1 (1980), 1-3.

Schwartz, L. の超函数論による Mikusiński 演算子法の取扱いについては

10. Krabbe, G.: Operational Calculus, Springer-Verlag (1970)

Laplace 変換による Heaviside 演算子法の取扱いについては

11. Doetsch, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation,

Berlin (1947) (Doetsch の生没年は 1892-1977 である)

12. 宇野利雄-洪妊植：ラプラス変換，共立出版(1974)

<u>特に工学における具体的問題の扱われているものとして</u>

13. 山田直平-国枝寿博：ラプラス変換と演算子法，コロナ社(1959)

なお本書では触れなかった Mikusiński 演算子法の差分(定差)方程式への応用については，本書脱稿の頃に，早原四朗博士から次の新著を贈られた.

14. 早原四朗-春木茂：新しい演算子法と離散解析函数論，槇書店(1981)

索　引

た行

な行

は行

ま行

や行

ら行

わ行

著者略歴

吉　田　耕　作

1909年　広島県に生る
1931年　東京大学理学部卒業
東京大学名誉教授．京都大学名誉教授．
著訳書　「位相解析の基礎」河田敬義・岩村聯両氏と共著（岩波書店，1960）
「シュワルツ物理数学の方法」渡辺二郎氏と共訳（岩波書店，1966）
「物理数学概論」（産業図書，1974）
「函数解析と微分方程式」伊藤清三氏と共編（岩波書店，1976）
「測度と積分」（岩波講座基礎数学のうち，1976）
「微分方程式の解法，第2版」「岩波書店，1978）
「積分方程式論，第2版」（岩波書店，1978）
「Functional Analysis, 6 th ed.」(Springer-Verlag 1980)

演算子法——一つの超函数論　UP応用数学選書 5

1982年2月26日　初　版

〔検印廃止〕

著　者　吉田耕作（よしだこうさく）©

発行所　財団法人　東京大学出版会

代表者　江村　稔

113 東京都文京区本郷7-3-1 東大構内
電話（811）8814・振替東京 6-59964

印刷所　株式会社理想社印刷所
製本所　新栄社製本所

3341-64650-5149

UP応用数学選書

① 超函数入門　上 金子　晃	2400円
② 2項分布とポアソン分布 竹内　啓・藤野和建	2400円
③ 正規分布――特性と応用―― 柴田義貞	2800円
④ 物理現象のフーリエ解析 小出昭一郎	2400円
⑤ 演算子法――一つの超函数論―― 吉田耕作	2000円

以下続刊予定

最小二乗法による実験データ解析
――プログラムSALS
中川　徹・小柳義夫

作譜――FORTRANによる
島内剛一

ジョルダン標準形
韓　太舜・伊理正夫

一筆書き・最短経路・最大流量
中森真理雄

生物モデルの数学
三村昌泰

自由境界問題――解析と数値解法
河原田秀夫

一般逆行列・射影行列・特異値分解
柳井晴夫・竹内　啓

超函数入門　下
金子　晃

数値積分
二宮市三

非線形マルコフ過程
上野　正

常微分方程式における逆問題――理論と応用
加藤文夫・斎藤正男